

Terminale générale – Spécialité mathématiques

Corrections des exercices

Combinatoire et dénombrement

Utilisation. Cherche d'abord les exercices dans le fascicule du cours et consulte ici l'indice, puis la correction détaillée. Les exercices sont des créations pédagogiques ; ils ne sont pas présentés comme des sujets officiels du bac.

Table des matières

1 Corrections expliquées : diagnostic et exercices 1 à 3

À consulter après une tentative ou un indice. Comparer d'abord les méthodes, puis les calculs. Une différence de résultat ne signifie pas que toute la démarche est à refaire.

Correction du diagnostic

D1. $3 + 2 \times 4 = 3 + 8 = 11$, alors que $(3 + 2) \times 4 = 5 \times 4 = 20$. Les parenthèses changent le regroupement. **D2.** $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$; ce n'est pas 2×3 . **D3.** Le dénominateur vaut $3 \times 2 \times 1 = 6$, donc $\frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 5 \times 4 = 20$. **D4.** Chacun des deux tee-shirts s'associe aux trois pantalons : $2 \times 3 = 6$ tenues. **D5.** AB et BA sont des codes différents, mais les deux ordres des noms décrivent la même équipe. **D6.** Équiprobables signifie « de même probabilité » ; la probabilité cherchée vaut $3/8$, comprise entre 0 et 1.

Correction 1

a) $\text{Card}(A) = 4$ et $\text{Card}(B) = 3$. **b)** Les éléments communs sont 3 et 4, donc $A \cap B = \{3, 4\}$, de cardinal 2. En rassemblant sans répétition, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, de cardinal 5. **c)** Dans $4 + 3$, les éléments 3 et 4 sont chacun comptés deux fois. On corrige : $4 + 3 - 2 = 5$. La liste de la réunion confirme le résultat.

Correction 2

a) Par exemple (T1, P1) et (T2, P1). **b)** Les six cases ci-dessous représentent six tenues distinctes.

	P1	P2
T1	(T1,P1)	(T1,P2)
T2	(T2,P1)	(T2,P2)
T3	(T3,P1)	(T3,P2)

Le principe multiplicatif donne bien $3 \times 2 = 6$. **c)** Chaque tenue a deux choix de veste : $6 \times 2 = 12$ tenues complètes. Ajouter une étape de choix multiplie le total ; on ne fait pas $6 + 2$.

Correction 3

a) A0 et 00 sont deux exemples valides. **b)** Le premier format donne $3 \times 10 = 30$ badges. Le second donne $10 \times 10 = 100$ badges, car le zéro initial et les répétitions sont autorisés. **c)** Un premier caractère lettre n'est jamais un chiffre : les formats sont disjoints. Il y a donc $30 + 100 = 130$ badges différents. On multiplie au sein d'un format, puis on additionne les formats.

2 Corrections expliquées : exercices 4 à 7

Correction 4

a) 001 est un code avec répétition. **b)** Chaque position offre cinq choix, donc $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ codes. **c)** Sans répétition, les choix diminuent : $5 \times 4 \times 3 = 60$ codes. **d)** Pour un nombre à trois chiffres, la première position offre 4 choix (1 à 4). Après ce choix, il reste 4 chiffres, dont zéro, puis $3 : 4 \times 4 \times 3 = 48$ nombres. Contrôle : parmi les 60 codes de c), $4 \times 3 = 12$ commencent par zéro ; $60 - 12 = 48$.

Correction 5

a) Six livres peuvent être placés en premier. **b)** On range tous les livres distincts : $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ rangements. **c)** A est fixé, les cinq autres se rangent librement : $5! = 120$ rangements. **d)** Le bloc formé de A et B et les quatre autres livres font cinq objets. Ils ont $5!$ rangements ; le bloc a deux ordres internes : $5! \times 2 = 120 \times 2 = 240$. Ce résultat est inférieur à 720. Oublier BA diviserait à tort la réponse par deux.

Correction 6

a) Non : un groupe ne distingue pas de positions. **b)** On choisit une combinaison :

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = \frac{210}{6} = 35.$$

Il y a 35 groupes. **c)** Les rôles distinguent les positions et une personne ne peut être reprise : $7 \times 6 \times 5 = 210$ attributions. **d)** Chaque groupe donne $3! = 6$ attributions, donc $35 \times 6 = 210$. Ce contrôle explique le facteur qui sépare les deux réponses.

Correction 7

a) $\binom{6}{0} = 1$ compte le groupe vide ; $\binom{6}{1} = 6$ compte les choix d'une personne. **b)** À partir de 1, 5, 10, 10, 5, 1, on obtient

$$1, \quad 1 + 5, \quad 5 + 10, \quad 10 + 10, \quad 10 + 5, \quad 5 + 1, \quad 1,$$

soit 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1. La ligne est symétrique. **c)** $\binom{8}{2} = 8 \times 7/2 = 28$, puis $\binom{8}{6} = \binom{8}{2} = 28$ par complémentarité. **d)** Avec Ana, choisir une personne parmi 7 donne $\binom{7}{1} = 7$. Sans Ana, choisir deux personnes parmi 7 donne $\binom{7}{2} = 21$. Les cas sont disjoints et exhaustifs : $7 + 21 = 28$ groupes, comme en c).

3 Corrections expliquées : exercices 8 à 11

Correction 8

a) Les positions 2 et 5 sont activées. **b)** Il y a 2 choix pour chacune des 5 options, soit $2^5 = 32$ réglages. **c)** Exactement deux options : choisir leurs positions donne $\binom{5}{2} = 5 \times 4 / 2 = 10$ réglages. Au moins une : retirer l'unique réglage 00000 donne $32 - 1 = 31$. **d)** La somme $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$ répartit les réglages par nombre d'options activées. Elle retrouve le total.

Correction 9

a) Il y a $6 + 4 = 10$ personnes et $\binom{10}{3} = 10 \times 9 \times 8 / 6 = 120$ groupes. **b)** Exactement deux débutants impose un confirmé : $\binom{6}{2} \binom{4}{1} = 15 \times 4 = 60$ groupes. **c)** Aucun confirmé : $\binom{6}{3} = 6 \times 5 \times 4 / 6 = 20$ groupes. Au moins un confirmé : $120 - 20 = 100$ groupes. **d)** En séparant selon le nombre de confirmés :

$$\begin{aligned}\text{Un confirmé : } & \binom{4}{1} \binom{6}{2} = 4 \times 15 = 60, \\ \text{Deux confirmés : } & \binom{4}{2} \binom{6}{1} = 6 \times 6 = 36, \\ \text{Trois confirmés : } & \binom{4}{3} \binom{6}{0} = 4 \times 1 = 4.\end{aligned}$$

La somme vaut $60 + 36 + 4 = 100$, ce qui vérifie c).

Correction 10

a) Sept jetons donnent $\binom{7}{2} = 7 \times 6 / 2 = 21$ groupes équiprobables. **b)** Deux verts : $\binom{4}{2} = 6$ groupes favorables, donc $P(\text{deux verts}) = 6/21 = 2/7$. **c)** Une couleur de chaque : $\binom{4}{1} \binom{3}{1} = 4 \times 3 = 12$ groupes, donc $12/21 = 4/7$. On ne multiplie pas par 2 : le tirage est sans ordre. **d)** Au moins un jaune est le contraire de deux verts :

$$1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7} \approx 0,7143, \quad \text{soit environ } 71,4\%.$$

Contrôle : les groupes sont 6 vert-vert, 12 vert-jaune, et $\binom{3}{2} = 3$ jaune-jaune ; $6 + 12 + 3 = 21$.

Correction 11

a) La boucle ne s'exécute pas ; le résultat est [1]. **b)** Les étapes sont [1], [1,1], [1,2,1], puis [1,3,3,1]. La somme vaut $8 = 2^3$. **c)** Chaque somme doit utiliser deux termes de l'ancienne ligne. Une modification immédiate pourrait mélanger ancienne et nouvelle ligne. **d)** $j > i$ interdit de choisir deux fois le même objet et ne conserve qu'un ordre par paire. Il faut obtenir $\binom{5}{2} = 10$ paires.

4 Correction de la synthèse : expliquer chaque choix

Correction 12 – Partie A

A1. 0025 est un code valide. Chacune des quatre positions offre 6 choix, de 0 à 5. **A2.** Un code est une liste de quatre chiffres avec répétitions autorisées ; le principe multiplicatif donne $6^4 = 1\,296$ codes. **A3.** Sans répétition, il reste successivement 6, 5, 4 et 3 choix : $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ codes. **A4.** Les codes se répartissent en deux catégories disjointes : tous les chiffres distincts, ou au moins une répétition. La seconde contient $1\,296 - 360 = 936$ codes. On retire les 360 codes sans répétition du total.

Correction 12 – Partie B

B1. Les zéros occupent un groupe de deux positions parmi quatre : $\binom{4}{2} = 4 \times 3/2 = 6$ choix. Les échanger ne crée pas un nouveau code. **B2.** Aux deux autres positions, il faut des chiffres non nuls : 5 choix à chacune, répétitions autorisées. Il y a donc $5^2 = 25$ remplissages pour chaque choix de positions, soit

$$\binom{4}{2} \times 5^2 = 6 \times 25 = 150 \text{ codes.}$$

Chaque code ayant exactement deux zéros désigne de façon unique leurs positions et les deux autres chiffres : aucun code n'est compté deux fois.

B3. Un code sans zéro a 5 choix à chaque position, donc $5^4 = 625$ possibilités. Par complément : $6^4 - 5^4 = 1\,296 - 625 = 671$ codes contiennent au moins un zéro. Contrôle : 150 est bien inférieur à 671.

B4. Le choix est uniforme, donc les 1 296 codes sont équiprobables. La probabilité d'obtenir exactement deux zéros est

$$p = \frac{150}{1\,296} = \frac{25}{216} \approx 0,1157.$$

Elle vaut environ 11,6 %, et est comprise entre 0 et 1.

Correction 12 – Partie C

C1. Chaque génération donne un succès ou un échec au sens défini. Les générations sont indépendantes par hypothèse et utilisent la même règle, donc la même probabilité $p = 25/216$. **C2.** Pour avoir deux succès, on choisit leurs deux positions parmi cinq : $\binom{5}{2} = 10$ possibilités ; les trois autres positions sont des échecs. **C3.** Chaque chemin avec deux succès a pour probabilité $p^2(1-p)^3$. Les dix chemins sont incompatibles entre eux ; on additionne :

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = 10 \left(\frac{25}{216} \right)^2 \left(\frac{191}{216} \right)^3.$$

Cette expression est exacte. Multiplier les probabilités suppose ici l'indépendance donnée dans l'énoncé.

5 Réponses aux rappels

5.1 À lire après les questions de rappel

Le lendemain. $3^2 = 9$ compte des listes de deux personnes avec répétitions ; les duos sont sans ordre et sans répétition, donc il y en a $\binom{3}{2} = 3$. Les codes binaires de longueur 2 sont 00, 01, 10, 11, soit $2^2 = 4$. Enfin, $\binom{4}{0} = 1$ compte l'unique choix vide.

Trois jours après. Les groupes sont au nombre de $\binom{6}{2} = 6 \times 5/2 = 15$. Les deux rôles distincts donnent $6 \times 5 = 30$ attributions. Chaque groupe donne deux attributions, ce qui explique $30 = 2 \times 15$.

Une semaine après. Exactement deux 1 : choisir deux positions parmi cinq donne $\binom{5}{2} = 10$ mots. Au moins un 1 : retirer 00000 des $2^5 = 32$ mots donne 31. Pour Pascal, choisir k éléments parmi $n + 1$ se décompose en « l'élément distingué est choisi », avec $\binom{n}{k-1}$ possibilités, et « il n'est pas choisi », avec $\binom{n}{k}$ possibilités. L'addition des deux cas donne $\binom{n+1}{k}$.

Complément facultatif. Deux biscuits de la sorte A forment un choix valide. Avec $n = 3$ et $k = 2$, on trouve $\binom{4}{2} = 6$ compositions. Si les sortes sont A, B, C, on vérifie par la liste AA, AB, AC, BB, BC, CC. Il ne faut pas ajouter BA, qui représente déjà AB.

6 Références

6.1 Références et portée du document

- Ministère de l'Éducation nationale, programme de spécialité de mathématiques de terminale générale, arrêté du 19 juillet 2019, Bulletin officiel spécial n° 8 du 25 juillet 2019 : texte de l'arrêté.
- Annexe officielle du programme de 2019, pages 6 et 7 du PDF : rubrique « Combinatoire et dénombrement ».
- Ministère de l'Éducation nationale, arrêté du 26 février 2026, Bulletin officiel n° 14 du 2 avril 2026. L'article 2 fixe l'entrée en application à la rentrée scolaire 2027–2028.

Références vérifiées le 8 septembre 2026. Si la session de bac visée est postérieure à 2027, vérifier le programme applicable à cette session.

Le cours couvre les objets et les propriétés de dénombrement du programme retenu, notamment les deux preuves de Pascal et la preuve par dénombrement de la somme des coefficients binomiaux. La fiche de probabilités fait le lien avec un autre chapitre ; elle ne constitue pas un cours complet sur la loi binomiale.

Compilation. Source autonome en UTF-8, compilable avec `pdflatex`. Deux passages sont nécessaires pour la table des matières et les renvois. Les figures sont produites par TikZ ; aucune image externe ni connexion internet n'est nécessaire pour compiler le document.