

Terminale générale – Spécialité mathématiques

Combinatoire et dénombrement

Compter sans tout énumérer, en comprenant ce que l'on compte

Objectifs

- Décrire précisément les résultats possibles d'une situation.
- Choisir et justifier une méthode de dénombrement.
- Calculer avec des factorielles et des coefficients binomiaux.
- Utiliser un dénombrement pour résoudre un problème et contrôler sa réponse.

Un cours à parcourir en plusieurs séances. Il n'est pas nécessaire de tout comprendre en une lecture. Commence par le diagnostic, puis avance fiche par fiche. Écrire quelques possibilités à la main est une vraie démarche mathématique : cela aide à comprendre la formule qui viendra ensuite.

Cadre retenu. Ce document vise la terminale générale, spécialité mathématiques, pour l'année scolaire 2026–2027 (bac 2027 supposé). Il s'appuie sur le programme de 2019 encore applicable à cette rentrée. Le programme publié au Bulletin officiel du 2 avril 2026 entre en application en terminale à la rentrée 2027–2028. Les références figurent en fin de document. Les exercices sont créés pour ce cours : aucun n'est présenté comme un sujet officiel du bac.

Organisation conseillée. Prévoir six séances de 35 à 45 minutes, avec une pause de 5 minutes au milieu si nécessaire :

1. Diagnostic, ensembles, addition et multiplication ; exercices 1 à 3.
2. Listes, répétitions et permutations ; exercices 4 et 5.
3. Combinaisons, propriétés et Pascal ; exercices 6 et 7.
4. Parties d'un ensemble et choix de méthode ; exercices 8 et 9.
5. Probabilités, algorithmique ; exercices 10 et 11.
6. Entraînement de synthèse, correction et bilan ; exercice 12.

Les preuves peuvent être reprises dans une séance supplémentaire. Le document séparé d'histoire ([histoire.pdf](#)) offre une mise en perspective vivante (recommandée au bac) pour éclairer le sens de chaque formule. Le complément sur les choix avec répétition est facultatif.

Pour chercher seule. Les énoncés et les indices sont dans ce fascicule. Les corrections détaillées sont dans le fascicule séparé. Essaie d'abord, puis consulte seulement l'indice correspondant. Après correction, refais la question sans regarder.

Table des matières

1	Avant de commencer : diagnostic et rappels	3
2	Compter quoi ? Ensembles et cardinal	4
3	Additionner ou multiplier ?	5
4	Couples, produits cartésiens et listes	6
5	Listes sans répétition et factorielles	7
6	Permutations : ranger tous les éléments	8
7	Combinaisons : choisir un groupe sans ordre	9
8	Coefficients binomiaux : premières propriétés	10
9	La relation de Pascal et ses deux démonstrations	11
10	Parties d'un ensemble, mots binaires et chemins	12
11	Choisir sa méthode et traiter des contraintes	13
12	Lien avec les probabilités	14
13	Algorithmique : construire et vérifier	15
14	Exercices d'apprentissage : prendre les bons réflexes	16
15	Exercices d'entraînement : choisir et justifier	17
16	Exercices guidés : contraintes, probabilités et algorithmes	18
17	Synthèse : entraînement à la rédaction du bac	19
18	Indices : une aide avant la correction	20
19	Bilan, erreurs utiles et rappels différés	21
20	Complément facultatif : choisir avec répétition, sans ordre	22
21	Références	23

1 Avant de commencer : diagnostic et rappels

Durée : 10 minutes, sans note et sans calculatrice. Ce diagnostic ne porte que sur les prérequis utiles ici. Tu peux écrire « à revoir » et continuer. Les réponses sont dans le fascicule séparé des corrections.

D1. Calculer $3 + 2 \times 4$, puis $(3 + 2) \times 4$.

D2. Écrire 2^3 comme un produit, puis le calculer.

D3. Simplifier $\frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1}$.

D4. Avec deux tee-shirts et trois pantalons, combien de tenues peut-on faire ? Représenter les possibilités si cela aide.

D5. Pour un code, AB et BA sont-ils différents ? Pour choisir une équipe formée d'Ana et de Bilal, l'ordre des noms change-t-il l'équipe ?

D6. Sur 8 issues équiprobables, 3 réalisent un événement. Quelle est sa probabilité ? Que signifie « équiprobables » ?

1.1 Les rappels utiles

Priorités. On calcule les parenthèses, puis les puissances, puis les multiplications et divisions, puis les additions et soustractions. Ainsi $5 + 3 \times 2 = 5 + 6 = 11$.

Puissances. Pour un entier positif a et un entier $k \geq 1$, a^k est le produit de k facteurs égaux à a . Par exemple, $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$. On pose $a^0 = 1$. Le symbole $\geq$ signifie « supérieur ou égal à ».

Fractions. La barre de fraction regroupe tout le numérateur et tout le dénominateur. On peut simplifier des facteurs communs non nuls :

$$\frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = \frac{7 \times (3 \times 2) \times 5}{3 \times 2} = 7 \times 5 = 35.$$

On ne supprime pas un terme à travers une addition : $\frac{6+2}{2} = 4$, et non $6+1$.

Entiers et résultat. Un nombre de possibilités est un entier positif ou nul. Il peut valoir zéro si la situation est impossible. Un dénombrement ne s'exprime pas en mètres ou en secondes : on précise « codes », « groupes », « chemins », selon ce qui est compté.

À retenir

Si D1 à D3 posent problème, retravailler les trois rappels avant les factorielles. Si D4 ou D5 bloque, commencer par dessiner ou lister de petits exemples. Si D6 bloque, poursuivre le dénombrement et reprendre le rappel de probabilités avant la fiche correspondante. Une erreur indique quoi travailler.

2 Compter quoi ? Ensembles et cardinal

Idée essentielle. Dénombrer, c'est déterminer le nombre de résultats différents possibles, sans omission et sans compter deux fois le même résultat. La combinatoire étudie notamment les façons de choisir et d'ordonner des objets.

2.1 Un petit vocabulaire pour être précis

Un **ensemble** est une collection d'éléments. Les accolades servent à l'écrire : $E = \{a, b, c\}$ contient trois éléments. On écrit $a \in E$ pour dire « a appartient à E » et $d \notin E$ pour dire le contraire.

Le **cardinal** d'un ensemble fini est son nombre d'éléments. On note $\text{Card}(E) = 3$. L'ensemble vide, noté $\emptyset$, n'a aucun élément : $\text{Card}(\emptyset) = 0$.

Dans un ensemble, l'ordre n'intervient pas et un élément n'apparaît qu'une fois :

$$\{a, b\} = \{b, a\}, \quad \{a, a, b\} = \{a, b\}.$$

Une **partie** de E est un ensemble dont tous les éléments appartiennent à E . On note $F \subseteq E$: « F est inclus dans E ». Par exemple $\{a, c\} \subseteq E$. L'ensemble vide et E lui-même sont aussi des parties de E .

2.2 Réunir, croiser, exclure

Considérons $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{3, 4\}$.

- La **réunion** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ contient les éléments de A ou de B , y compris ceux des deux.
- L'**intersection** $A \cap B = \{3\}$ contient les éléments communs.
- $A \setminus B = \{1, 2\}$ contient les éléments de A absents de B .

Deux ensembles sont **disjoints** lorsque leur intersection est vide. Si l'ensemble de tous les résultats est E et si $A \subseteq E$, le **complémentaire** de A dans E est $E \setminus A$.

Exemple expliqué

Pour former un duo parmi Ana, Bilal et Chloé, les résultats sont :

- Ana et Bilal ;
- Ana et Chloé ;
- Bilal et Chloé.

Il y a 3 duos.

Si l'on choisit une présidente ou un président et une secrétaire ou un secrétaire, les rôles distinguent les résultats : Ana à la présidence et Bilal au secrétariat n'est pas la même attribution que l'inverse. Il y en a 6.

À retenir

Avant de calculer, écrire : « Un résultat est... ». Puis donner deux exemples et décider s'ils représentent le même résultat. Cette étape détermine si l'ordre compte.

3 Additionner ou multiplier ?

3.1 Additionner des cas qui ne se recouvrent pas

Une boutique propose 4 carnets et 3 agendas différents. On choisit **un seul article**, carnet ou agenda : il y a $4 + 3 = 7$ choix.

Principe additif. Si A et B sont deux ensembles finis disjoints, alors

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B).$$

Pour plusieurs catégories deux à deux disjointes, on additionne leurs cardinaux. « Deux à deux » signifie que deux catégories différentes n'ont aucun élément en commun.

Si des éléments sont communs, ils seraient comptés deux fois :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

Par exemple, 12 élèves pratiquent la musique, 9 le théâtre et 4 les deux. Le nombre d'élèves pratiquant au moins une de ces activités est $12 + 9 - 4 = 17$. Les 4 élèves communs doivent être comptés une seule fois.

3.2 Multiplier des choix successifs

Pour choisir **un carnet et un stylo**, avec 4 carnets et 3 stylos possibles pour chaque carnet, il y a $4 \times 3 = 12$ associations.

Principe multiplicatif. Si une construction comporte plusieurs étapes, avec un nombre fixé de possibilités à chaque étape quel que soit le choix antérieur, on multiplie ces nombres. Les options peuvent changer : c'est leur *nombre* qui doit rester le même à l'étape considérée.

Exemple expliqué

Une formule comprend une entrée et un plat. Deux entrées sont proposées, et chacune peut être associée à l'un des trois plats P1, P2, P3.

	P1	P2	P3
Entrée E1	(E1,P1)	(E1,P2)	(E1,P3)
Entrée E2	(E2,P1)	(E2,P2)	(E2,P3)

Chaque case est une formule complète. Deux lignes de trois cases donnent $2 \times 3 = 6$ formules.

Si une entrée autorise 3 plats et l'autre seulement 2, il faut séparer les deux cas : $3 + 2 = 5$ formules. Un produit 2×3 serait faux.

À retenir

On additionne des catégories sans recouvrement ; on multiplie les nombres de choix pour construire un résultat en plusieurs étapes. Les mots « ou » et « et » sont des indices, pas des règles automatiques.

4 Couples, produits cartésiens et listes

4.1 Des positions qui ont un rôle

Un **couple** est une liste de deux éléments : (a, b) . La première et la seconde position sont distinguées. Ainsi $(a, b) \neq (b, a)$ si $a \neq b$, où $\neq$ signifie « différent de ». Un triplet a trois positions. Une **k -liste**, ou **k -uplet**, en a k , où k est un entier positif ou nul.

Exemple. Une taille et une couleur donnent un couple (M, bleu). Si $A = \{S, M, L\}$ et $B = \{\text{bleu, noir}\}$, le **produit cartésien** $A \times B$ est l'ensemble de tous les couples dont le premier élément est dans A et le second dans B .

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B) = 3 \times 2 = 6.$$

Pour des ensembles finis $A_1, \dots, A_k$, les indices numérotent les ensembles et les points indiquent qu'on poursuit de la même façon :

$$\text{Card}(A_1 \times \dots \times A_k) = \text{Card}(A_1) \times \dots \times \text{Card}(A_k).$$

Les notions de couple et de produit cartésien existent aussi pour des ensembles infinis ; ici, on ne dénombre que des ensembles finis.

4.2 Répétitions autorisées : autant de choix à chaque position

On note A^k l'ensemble des k -listes d'éléments d'un même ensemble A . Si A possède $n \geq 1$ éléments, chaque position offre n choix :

$$\boxed{\text{Card}(A^k) = n^k.}$$

Pour $k = 0$, il existe une unique liste vide, ce qui correspond à $n^0 = 1$.

Exemple expliqué

Un code comporte 3 chiffres choisis parmi 0, 1, 2, 3. Le zéro initial et les répétitions sont autorisés : 003 est un code possible.

$$\begin{aligned} \text{Nombre de codes} &= 4 \times 4 \times 4 && \text{(trois positions)} \\ &= 4^3 \\ &= 64. \end{aligned}$$

Il y a 64 codes. En écrire quelques-uns (000, 001, 010) permet de vérifier que l'ordre et les répétitions sont bien pris en compte.

À retenir

n^k compte des listes de longueur k , ordonnées, avec répétitions autorisées, choisies parmi n éléments à chaque position. Un nombre à trois chiffres, lui, ne peut pas commencer par zéro.

5 Listes sans répétition et factorielles

5.1 Quand un choix enlève une possibilité

Huit personnes participent à une course sans ex æquo. Un podium indique la première, la deuxième et la troisième place. On ne peut pas occuper deux places.

$$\begin{aligned}\text{Nombre de podiums} &= 8 \times 7 \times 6 \\ &= 56 \times 6 \\ &= 336.\end{aligned}$$

Après chaque choix, il reste une personne de moins. Même si les noms disponibles changent, le nombre de personnes restantes est fixé.

Pour n éléments distincts et $1 \leq k \leq n$, le nombre de k -listes **d'éléments distincts** vaut

$$n(n-1) \cdots (n-k+1).$$

Il y a k facteurs. Le dernier est $n-k+1$, car avant le k -ième choix, $k-1$ éléments ont déjà été utilisés. Ces listes sont aussi appelées arrangements sans répétition.

5.2 La factorielle : une écriture abrégée

Pour un entier $n \geq 1$, la **factorielle** de n , notée $n!$, est

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

Par exemple $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Par convention, $0! = 1$. Le signe « ! » a ici un sens mathématique, ce n'est pas une ponctuation.

Exemple expliqué

Pour retrouver le nombre de podiums, on simplifie les facteurs communs :

$$\begin{aligned}\frac{8!}{(8-3)!} &= \frac{8!}{5!} \\ &= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} \\ &= 8 \times 7 \times 6 = 336.\end{aligned}$$

On ne calcule pas les deux grandes factorielles séparément.

À retenir

Pour $0 \leq k \leq n$, le nombre de listes sans répétition est $\frac{n!}{(n-k)!}$. Pour $k = 0$, on compte la liste vide : il y en a une. Pour $k > n$, le choix est impossible : il y a zéro liste sans répétition, et on n'utilise pas une factorielle d'entier négatif.

6 Permutations : ranger tous les éléments

Idée essentielle. Une permutation est un rangement de tous les éléments d'un ensemble fini, chacun utilisé exactement une fois.

Exemple expliqué

Avec trois livres distincts A, B et C, les rangements en ligne sont ABC, ACB, BAC, BCA, CAB et CBA. Il y en a 6.

Le premier emplacement offre 3 choix, le deuxième 2, et le dernier 1 :

$$3 \times 2 \times 1 = 3! = 6.$$

L'énumération et le produit donnent le même résultat.

Pour n éléments distincts, il y a donc

$$n! \text{ permutations.}$$

C'est le cas $k = n$ des listes sans répétition : $\frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$. Il y a un seul rangement de zéro objet : le rangement vide.

6.1 Une contrainte : deux livres doivent rester côte à côte

On range cinq livres distincts A, B, C, D, E sur une étagère. On veut que A et B soient côte à côte, dans l'un ou l'autre ordre.

1. Regrouper A et B en un bloc. Il reste quatre objets à ranger : le bloc, C, D, E. Cela donne $4!$ rangements.
2. Dans le bloc, il y a deux ordres : AB et BA.
3. Chaque rangement final provient d'un unique rangement des blocs et d'un unique ordre interne : on peut multiplier sans compter deux fois.

$$\begin{aligned} \text{Nombre de rangements} &= 4! \times 2 \\ &= (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 2 \\ &= 24 \times 2 = 48. \end{aligned}$$

Contrôle. Sans contrainte, il y aurait $5! = 120$ rangements. Le résultat 48 est bien inférieur à 120.

Attention à ce qui est distinct. Pour les lettres du mot MAMAN, $5!$ compterait les deux M et les deux A comme différents. Chaque mot visible serait compté $2! \times 2!$ fois, d'où $\frac{5!}{2!2!} = 30$ mots distincts. C'est une application du principe de correction d'un comptage multiple, à aborder après le cas des objets distincts.

À retenir

On utilise $n!$ pour ranger en ligne n objets tous distincts. Vérifier les éventuelles contraintes avant de calculer.

7 Combinaisons : choisir un groupe sans ordre

7.1 Pourquoi doit-on diviser ?

On choisit un duo parmi cinq personnes distinctes A, B, C, D, E. Si l'on choisit une première personne puis une deuxième, on obtient $5 \times 4 = 20$ listes. Mais AB et BA donnent le même duo. Chaque duo a été compté exactement $2! = 2$ fois : il y a $20/2 = 10$ duos.

Pour un groupe de trois, les six listes ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA désignent toutes le même groupe $\{A, B, C\}$. Chaque groupe de k personnes a exactement $k!$ ordres possibles.

7.2 Définition et formule

Pour des entiers $n \geq 0$ et $0 \leq k \leq n$, une **combinaison de k éléments parmi n** est une partie à k éléments d'un ensemble à n éléments. Son nombre est le **coefficient binomial** $\binom{n}{k}$, lu « k parmi n ». Le nombre total n est écrit en haut.

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Pour $k \geq 1$, on peut aussi écrire

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

Justification. Le numérateur compte les listes sans répétition ; la division par $k!$ retire les différents ordres de chaque même groupe.

Exemple expliqué

Une association de 8 personnes choisit 3 représentantes ou représentants, sans attribuer de rôles. L'ordre des noms ne change pas le groupe.

$$\begin{aligned} \text{Nombre de groupes} &= \binom{8}{3} \\ &= \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} \\ &= \frac{336}{6} \\ &= 56. \end{aligned}$$

Il y a 56 groupes. Contrôle : $56 \times 3! = 336$ redonne le nombre de listes ordonnées de trois personnes.

À retenir

Une combinaison est un choix **sans ordre et sans répétition**. Si les personnes ont des rôles différents, ce n'est plus le même objet à compter.

8 Coefficients binomiaux : premières propriétés

8.1 Cas à comprendre avant de les mémoriser

Pour $n \geq 0$,

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{et} \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Il y a un seul choix de zéro élément : l'ensemble vide. Il y a un seul choix de tous les éléments : l'ensemble entier. En particulier $\binom{0}{0} = 1$.

Pour $n \geq 1$, $\binom{n}{1} = n$: choisir un élément donne n possibilités. Pour $n \geq 2$,

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

On compte les couples d'éléments distincts puis on divise par les deux ordres de chaque paire. Ainsi $\binom{6}{2} = 6 \times 5 / 2 = 15$.

8.2 Symétrie : choisir ou laisser de côté

Choisir 2 personnes parmi 7 revient à désigner les 5 personnes non choisies. À chaque choix de 2 correspond un unique choix de 5, et inversement. On parle d'une **bijection** : une correspondance un à un dans les deux sens. Pour $0 \leq k \leq n$,

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}.$$

On peut aussi vérifier la formule en échangeant $k!$ et $(n-k)!$ au dénominateur. Par exemple,

$$\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45.$$

La symétrie raccourcit les calculs.

8.3 Utiliser la calculatrice après avoir choisi la méthode

La fonction de combinaison peut être notée **nCr**, **combinaison** ou autrement selon le modèle. Vérifier dans la notice l'ordre des arguments : n est le nombre disponible, k le nombre choisi. Contrôler d'abord sur $\binom{5}{2} = 10$. Aucun réglage degrés/radians n'intervient dans un dénombrement.

Les factorielles deviennent vite grandes ; la fonction de combinaison évite souvent des calculs intermédiaires inutiles. Un affichage arrondi en notation scientifique peut ne pas donner tous les chiffres de l'entier exact. Garder une expression comme $\binom{30}{12}$ si une valeur exacte est demandée.

À retenir

Un coefficient binomial compte des groupes : c'est un entier. Avant de valider l'affichage, vérifier l'ordre des paramètres et le sens du choix.

9 La relation de Pascal et ses deux démonstrations

9.1 Compter selon la présence d'une personne

Pour choisir 3 personnes parmi 6, isolons Ana et distinguons deux cas :

- Ana est choisie : il reste à choisir 2 personnes parmi les 5 autres, soit $\binom{5}{2} = 10$ groupes.
- Ana n'est pas choisie : on choisit les 3 personnes parmi les 5 autres, soit $\binom{5}{3} = 10$ groupes.

Les cas sont disjoints et couvrent tous les groupes : $\binom{6}{3} = 10 + 10 = 20$.

Preuve générale par dénombrement. Parmi $n + 1$ éléments, on en distingue un. Les groupes de taille k le contenant correspondent aux groupes de taille $k - 1$ parmi les n autres ; ceux ne le contenant pas sont les groupes de taille k parmi ces n autres. Pour $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$, le principe additif donne la **relation de Pascal** :

$$\boxed{\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}}.$$

9.2 Preuve par le calcul

Avec les mêmes conditions, on met au dénominateur commun $k!(n-k+1)!$. On utilise $k! = k(k-1)!$ et $(n-k+1)! = (n-k+1)(n-k)!$.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{kn! + (n-k+1)n!}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{(n+1)n!}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!} = \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

9.3 Le triangle de Pascal

Chaque ligne commence et finit par 1. Un coefficient intérieur est la somme des deux coefficients de la ligne précédente situés aux colonnes $k-1$ et k . Les cases vides sont hors du domaine $0 \leq k \leq n$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Pour obtenir $\binom{4}{2} = 6$, on additionne $\binom{3}{1} = 3$ et $\binom{3}{2} = 3$.

10 Parties d'un ensemble, mots binaires et chemins

10.1 Choisir ou ne pas choisir chaque élément

Pour $E = \{a, b, c\}$, les parties sont

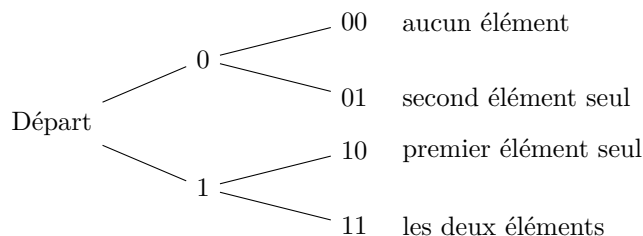
$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}.$$

Il y en a 8. Fixons l'ordre a, b, c . On code chaque partie par trois chiffres : 1 si l'élément est choisi, 0 sinon. La partie $\{a, c\}$ correspond à 101 ; l'ensemble vide correspond à 000.

Ce code est un **mot binaire** : une liste de symboles choisis parmi 0 et 1. À chaque partie correspond un seul mot, et inversement. Pour n éléments, chacun des n emplacements offre 2 choix. Ainsi,

Nombre de parties d'un ensemble à n éléments $= 2^n$.

Cela vaut aussi pour $n = 0$: l'ensemble vide a une seule partie, lui-même.



Arbre des parties d'un ensemble de deux éléments ordonnés pour le codage. Chaque niveau décide du sort d'un élément ; chaque feuille est une partie.

10.2 Sommer les coefficients binomiaux : une preuve à connaître

Les parties se répartissent selon leur taille : 0, 1, 2, jusqu'à n . Ces catégories sont disjointes et contiennent toutes les parties. La catégorie de taille k contient $\binom{n}{k}$ parties. D'où

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Le symbole $\sum$ signifie ici additionner les termes pour tous les entiers k de 0 à n : $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$. Pour $n = 3$, cela donne $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$.

À retenir

Une partie, un mot binaire et un chemin dans l'arbre codent le même choix. Avec exactement k chiffres 1 parmi n positions, il y a $\binom{n}{k}$ mots : on choisit les positions des 1.

11 Choisir sa méthode et traiter des contraintes

Méthode

Décrire un résultat ; décider si l'ordre compte ; vérifier si un élément peut être réutilisé ; repérer les contraintes ; compter et contrôler.

Objet compté	Nombre	Exemple
Liste de k éléments parmi n , répétitions autorisées	n^k	Code avec répétitions
Liste de k éléments distincts parmi n	$\frac{n!}{(n-k)!}$	Podium
Rangement de tous les n éléments distincts	$n!$	Livres sur une étagère
Groupe de k éléments parmi n , sans répétition	$\binom{n}{k}$	Comité sans rôles
Partie de taille quelconque d'un ensemble à n éléments	2^n	Options activées ou non

Dans les formules sans répétition, $0 \leq k \leq n$. Pour n^k , on suppose $n \geq 1$. Les cas impossibles se traitent séparément. Les groupes avec répétition ne relèvent pas de $\binom{n}{k}$: voir le complément.

11.1 « Au moins un » : compter le contraire

Un code comporte 4 chiffres de 0 à 9, zéro initial et répétitions autorisés. On cherche les codes contenant **au moins un zéro**, c'est-à-dire un, deux, trois ou quatre zéros.

Tous les codes : $10^4 = 10\,000$,

Codes sans aucun zéro : $9^4 = 6\,561$,

Codes avec au moins un zéro : $10^4 - 9^4 = 3\,439$.

Le complément évite de séparer quatre cas. « Au moins un » ne signifie pas « exactement un ». « Au plus deux » signifie zéro, un ou deux.

11.2 « Exactement » : imposer les quantités dans chaque catégorie

Parmi 5 débutants et 4 confirmés, tous distincts, on veut un groupe de 3 personnes contenant exactement 2 débutants.

$$\binom{5}{2} \binom{4}{1} = 10 \times 4 = 40.$$

On choisit 2 personnes dans la première catégorie *et* 1 dans la seconde. Chaque groupe final détermine ces deux choix de façon unique. Il ne faut pas multiplier encore par $3!$, car on ne distribue pas de rôles.

À retenir

Le résultat doit être entier et ne pas dépasser le nombre de résultats sans contrainte. Une petite liste à la main aide à repérer un double comptage.

12 Lien avec les probabilités

12.1 Rappel : compter ne suffit pas toujours

L'**univers**, noté Ω , est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire. Un **événement** A est une partie de cet univers. Sa probabilité, notée $P(A)$, est comprise entre 0 et 1.

Si l'univers est fini, non vide, et que **toutes les issues ont la même probabilité** (équiprobabilité), alors

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}}.$$

Il faut compter le même type d'objets au numérateur et au dénominateur. Un tirage « au hasard » doit préciser le modèle permettant l'équiprobabilité.

Exemple expliqué

Un sac contient 5 boules rouges et 3 bleues, distinguables par des numéros. On choisit simultanément 3 boules, chaque groupe de 3 ayant la même probabilité. Soit A l'événement « obtenir exactement 2 rouges ».

$$\text{Card}(\Omega) = \binom{8}{3} = 56 \quad (\text{groupes sans ordre}),$$

$$\text{Card}(A) = \binom{5}{2} \binom{3}{1} = 10 \times 3 = 30 \quad (2 \text{ rouges et } 1 \text{ bleue}),$$

$$P(A) = \frac{30}{56} = \frac{15}{28} \approx 0,536.$$

La probabilité vaut exactement $15/28$, soit environ 53,6 %. Le symbole $\approx$ signale un arrondi ; $=$ exprime une égalité exacte. Le résultat est bien entre 0 et 1. Compter seulement les couleurs ne donnerait pas des issues équiprobables.

12.2 Vers la loi binomiale : compter les positions des succès

Une **épreuve de Bernoulli** possède deux résultats, appelés succès et échec. On répète $n \geq 1$ fois une telle épreuve, avec une même probabilité de succès p , où $0 < p < 1$, et des épreuves **indépendantes** : les résultats passés ne changent pas les probabilités des suivantes.

La variable X compte le nombre de succès. Un chemin avec exactement k succès a pour probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$: on multiplie les probabilités le long du chemin grâce à l'indépendance. Il y a $\binom{n}{k}$ chemins de cette sorte, selon les positions des succès. Donc

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Pour $n = 3$, $p = 0,2$ et $k = 1$, les chemins sont SEE, ESE, EES : $P(X = 1) = 3 \times 0,2 \times 0,8^2 = 0,384$. Si $p = 0$, il n'y a aucun succès ; si $p = 1$, il y en a toujours n . Cette passerelle sera reprise dans le cours de probabilités ; un tirage sans remise ne satisfait généralement pas ces conditions.

13 Algorithmique : construire et vérifier

Prérequis ciblés. Une liste Python se note avec des crochets. `ligne[j]` lit l'élément d'indice `j`, en commençant à 0. Une boucle `for` répète des instructions ; l'indentation les regroupe. `range(a, b)` parcourt les entiers de `a` à `b-1`. `append` ajoute un élément en fin de liste ; `return` renvoie le résultat d'une fonction. Dans le code, `=` affecte une valeur.

13.1 Générer une ligne du triangle de Pascal

On part de la ligne 0, contenant seulement 1. Pour passer à la suivante, on écrit 1, puis les sommes de deux voisins, puis 1.

```
def ligne_pascal(n):
    # n est un entier positif ou nul.
    ligne = [1]
    for r in range(1, n + 1):
        nouvelle = [1]
        for j in range(1, r):
            nouvelle.append(ligne[j - 1] + ligne[j])
        nouvelle.append(1)
        ligne = nouvelle
    return ligne
```

`ligne_pascal(4)` renvoie `[1, 4, 6, 4, 1]`. À l'étape `r`, la nouvelle liste contient les coefficients de la ligne `r`, car les bords valent 1 et les autres suivent Pascal. On utilise une nouvelle liste pour garder intacte la ligne précédente.

13.2 Générer toutes les paires sans répétition

Pour `objets = ["A", "B", "C", "D"]`, on ne retient que les indices `i < j` : cela évite AA et évite de compter AB puis BA.

```
def paires(objets):
    resultat = []
    n = len(objets) # len donne la longueur de la liste.
    for i in range(n):
        for j in range(i + 1, n):
            resultat.append((objets[i], objets[j]))
    return resultat
```

Il faut fournir des objets tous distincts. Le résultat contient (A, B) , (A, C) , (A, D) , (B, C) , (B, D) , (C, D) , donc $\binom{4}{2} = 6$ paires. Pour les triplets, on ajoute une boucle avec un troisième indice strictement supérieur à `j`.

13.3 Générer des permutations

La bibliothèque standard Python fournit `itertools.permutations` :

```
from itertools import permutations
rangements = list(permutations(["A", "B", "C"]))
```

On obtient les six rangements des trois objets. Générer toutes les possibilités ne convient qu'aux petits ensembles : $10! = 3\,628\,800$ rangements !

14 Exercices d'apprentissage : prendre les bons réflexes

Chercher sur une feuille séparée. Pour chaque question, écrire ce qui est compté avant de calculer. Les indices se trouvent page 20.

Exercice 1 – Ensembles et recouvrement – 5 min

Compétence : traduire une réunion et éviter un double comptage. Prérequis : ensembles, cardinal, principe additif.

On pose $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{3, 4, 5\}$.

- Donner les cardinaux de A et de B .
- Écrire $A \cap B$ et $A \cup B$, puis leurs cardinaux.
- Expliquer pourquoi $4 + 3$ ne compte pas correctement la réunion.

Exercice 2 – Composer une tenue – 5 min

Compétence : représenter un produit cartésien. Prérequis : principe multiplicatif et couples.

On possède trois tee-shirts T1, T2, T3 et deux pantalons P1, P2. Toutes les associations sont autorisées.

- Écrire deux tenues possibles sous forme de couples.
- Faire un tableau de toutes les tenues, puis donner leur nombre.
- Si l'on ajoute deux vestes possibles pour chaque tenue, combien de tenues complètes, comprenant une veste, obtient-on ?

Exercice 3 – Deux formats de badge – 6 min

Compétence : combiner addition et multiplication. Prérequis : listes et cas disjoints.

Un badge porte soit une lettre parmi A, B, C suivie d'un chiffre de 0 à 9, soit deux chiffres de 0 à 9. Zéro initial et répétitions sont autorisés.

- Donner un exemple de chaque format.
- Dénombrer les badges de chaque format.
- Combien de badges différents peut-on fabriquer au total ? Justifier pourquoi les deux catégories ne se recouvrent pas.

Exercice 4 – Répétitions et zéro initial – 8 min

Compétence : adapter le nombre de choix par position. Prérequis : puissances et listes sans répétition.

On utilise les chiffres 0, 1, 2, 3, 4.

- Citer un code de trois chiffres ayant une répétition.
- Combien de codes de trois chiffres existe-t-il si tout est autorisé ?
- Combien de ces codes ont trois chiffres tous distincts ?
- Combien de *nombres à trois chiffres* tous distincts peut-on former ?

15 Exercices d'entraînement : choisir et justifier

Exercice 5 – Des livres en ligne – 8 min

Compétence : utiliser une permutation sous contrainte. Prérequis : factorielle, méthode du bloc.

Six livres distincts A, B, C, D, E, F sont rangés sur une étagère.

- a) Combien de choix y a-t-il pour le premier emplacement ?
- b) Combien de rangements existe-t-il au total ?
- c) Combien commencent par A ?
- d) Combien placent A et B côte à côte, dans n'importe quel ordre ?

Exercice 6 – Un groupe ou des rôles ? – 8 min

Compétence : distinguer combinaison et liste ordonnée. Prérequis : listes sans répétition et combinaisons.

Un club compte 7 personnes distinctes.

- a) Pour choisir un groupe de 3, l'ordre d'écriture des noms compte-t-il ?
- b) Combien de groupes de 3 peut-on former ?
- c) Combien d'attributions de trois rôles différents à trois personnes différentes peut-on faire ?
- d) Expliquer le lien entre les deux nombres obtenus.

Exercice 7 – Pascal et symétrie – 8 min

Compétence : calculer et expliquer les coefficients binomiaux. Prérequis : propriétés et triangle de Pascal.

- a) Donner $\binom{6}{0}$ et $\binom{6}{1}$, en interprétant chacun.
- b) Construire la ligne 6 à partir de la ligne 5 du cours.
- c) Calculer $\binom{8}{2}$, puis en déduire $\binom{8}{6}$.
- d) Pour choisir 2 élèves parmi 8, distinguer les groupes contenant Ana et les groupes ne la contenant pas. Retrouver le résultat précédent.

Exercice 8 – Options et mots binaires – 8 min

Compétence : relier parties, listes binaires et combinaisons. Prérequis : nombre de parties et choix des positions.

Une application possède 5 options, chacune activée (1) ou désactivée (0). Les options sont écrites dans un ordre fixé et tous les réglages sont autorisés.

- a) Quelles positions sont activées dans 01001 ?
- b) Combien de réglages sont possibles ?
- c) Combien activent exactement 2 options ? Au moins une option ?
- d) Vérifier la réponse au total en additionnant la ligne 5 de Pascal.

16 Exercices guidés : contraintes, probabilités et algorithmes

Exercice 9 – Une équipe mixte de niveaux – 10 min

Compétence : séparer des cas et utiliser le complément. Prérequis : combinaisons, principes additif et multiplicatif.

Un atelier réunit 6 débutants et 4 confirmés, tous distincts. On choisit un groupe de 3 personnes sans rôles.

- a) Combien de personnes sont disponibles ? Combien de groupes de 3 ?
- b) Combien de groupes contiennent exactement 2 débutants ?
- c) Combien ne contiennent aucun confirmé ? En déduire le nombre de groupes contenant au moins un confirmé.
- d) Retrouver ce dernier nombre en séparant les cas : 1, 2 ou 3 confirmés.

Exercice 10 – Tirage de jetons – 10 min

Compétence : compter des issues équiprobables de même nature. Prérequis : combinaisons, complément, fraction de probabilité.

Un sac contient 4 jetons verts et 3 jaunes, tous numérotés. On tire simultanément 2 jetons ; tous les groupes de 2 sont équiprobables.

- a) Donner le nombre total de jetons, puis celui des groupes possibles.
- b) Calculer la probabilité d'obtenir deux verts.
- c) Calculer la probabilité d'obtenir un jeton de chaque couleur.
- d) Calculer la probabilité d'obtenir au moins un jaune. Donner la valeur exacte puis un pourcentage arrondi au dixième.

Exercice 11 – Comprendre un programme – 8 min

Compétence : interpréter une construction algorithmique. Prérequis : Pascal et le rappel Python du cours.

- a) Dans `ligne_pascal`, quelle liste est renvoyée pour `n = 0` ?
- b) Décrire les étapes pour `n = 3`, puis additionner les termes obtenus.
- c) Pourquoi crée-t-on `nouvelle` au lieu de modifier immédiatement chaque terme de `ligne` ?
- d) Pour générer des paires parmi 5 objets distincts, pourquoi impose-t-on `j > i` ? Combien de paires le programme doit-il produire ?

Avant la synthèse. Refaire sans aide une question de l'exercice 4 et une question de l'exercice 6. Si la formule choisie reste incertaine, reprendre la phrase « Un résultat est... » et comparer deux exemples.

17 Synthèse : entraînement à la rédaction du bac

Exercice 12 – Contrôler un accès – 25 min

Exercice original de synthèse, non issu d'un sujet officiel. Compétences : modéliser, justifier, dénombrer, calculer une probabilité. Prérequis : listes, complément, positions et épreuves indépendantes.

Un dispositif utilise des codes de quatre chiffres, chacun choisi parmi 0, 1, 2, 3, 4, 5. Le zéro initial et les répétitions sont autorisés.

Partie A – Décrire et compter (environ 8 min).

- A1. Donner un code possible. Combien de choix offre chaque position ?
- A2. Déterminer le nombre total de codes.
- A3. Déterminer le nombre de codes dont les quatre chiffres sont distincts.
- A4. En déduire le nombre de codes contenant au moins une répétition.

Partie B – Imposer des zéros (environ 9 min).

- B1. On veut exactement deux zéros. Combien de façons y a-t-il de choisir leurs positions parmi les quatre positions ?
- B2. Pour des positions des zéros fixées, combien de façons peut-on remplir les deux autres positions ? En déduire le nombre de codes recherchés.
- B3. Déterminer le nombre de codes contenant au moins un zéro.
- B4. Un code est choisi uniformément parmi tous les codes possibles. Calculer la probabilité qu'il contienne exactement deux zéros.

Partie C – Répéter une expérience (environ 6 min).

On génère cinq codes indépendamment, chacun uniformément parmi tous les codes. Un succès signifie « le code contient exactement deux zéros ». On note p la probabilité calculée en B4 et X le nombre de succès parmi les cinq codes.

- C1. Justifier pourquoi ces cinq générations forment une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même probabilité de succès.
- C2. Expliquer pourquoi il existe $\binom{5}{2}$ façons de placer deux succès parmi les cinq générations.
- C3. Exprimer $P(X = 2)$ à l'aide de p , sans exiger de valeur décimale.

Rédaction attendue. Une phrase pour identifier les objets, une justification du choix de méthode, une expression exacte, puis une phrase-réponse. Garder environ 2 minutes pour vérifier entiers, contraintes et probabilités.

Si tu bloques. Écrire les choix disponibles à chaque position, même sans finir le calcul. Cette étape constitue déjà une partie de la solution. Passer ensuite à une autre question ; noter celle à reprendre avec l'indice.

18 Indices : une aide avant la correction

Lire seulement l'indice nécessaire, puis revenir à sa feuille.

Diagnostic

D1 : la multiplication passe avant l'addition hors parenthèses. D2 : l'exposant indique le nombre de facteurs. D3 : regrouper le dénominateur. D4 : une ligne par tee-shirt. D5 : échanger les deux noms. D6 : issues favorables divisées par issues totales, si elles ont la même probabilité.

Exercice 1

Dans la réunion, n'écrire chaque nombre qu'une fois. Quels nombres ont été comptés à la fois dans A et dans B ?

Exercice 2

Une ligne par tee-shirt, une colonne par pantalon. Chaque case offre ensuite le même nombre de choix de veste.

Exercice 3

Compter séparément les deux formats. Le premier caractère peut-il être à la fois une lettre et un chiffre ?

Exercice 4

Écrire trois cases. En c), un chiffre utilisé n'est plus disponible. En d), traiter d'abord la première case, où zéro est interdit.

Exercice 5

En c), fixer A puis ranger les livres restants. En d), remplacer A et B par un bloc et penser à son ordre interne.

Exercice 6

Un même groupe de trois personnes peut recevoir les trois rôles de plusieurs façons. Combien d'ordres possède-t-il ?

Exercice 7

Les bords valent 1. À l'intérieur, additionner les deux termes appropriés de la ligne précédente. Pour d), Ana prend-elle une des deux places ?

Exercice 8

Pour exactement deux options, choisir les positions des 1. Pour au moins une option, retirer le réglage où tout est désactivé.

Exercice 9

« Aucun confirmé » signifie « trois débutants ». Pour d), choisir dans chaque catégorie, multiplier dans chaque cas, puis additionner les cas disjoints.

Exercice 10

Les issues sont des groupes de jetons numérotés, pas seulement des couleurs. Le contraire d'« au moins un jaune » est « aucun jaune ».

Exercice 11

Écrire les listes successives sur des lignes séparées. Une nouvelle valeur calculée doit-elle servir au calcul suivant sur la même ligne ?

Exercice 12, partie A

Pour au moins une répétition, retirer les codes dont tous les chiffres sont distincts.

Exercice 12, partie B

Choisir d'abord les deux positions des zéros. Aux autres positions, zéro est interdit, mais les chiffres non nuls peuvent se répéter. Pour B3, compter d'abord les codes sans zéro.

Exercice 12, partie C

Fixer deux positions de succès, calculer la probabilité d'un tel chemin, puis compter les chemins ayant deux succès.

19 Bilan, erreurs utiles et rappels différés

19.1 Repérer la nature d'une erreur

Erreur de calcul

La méthode est correcte, mais $\binom{8}{3} = 336/6$ est mal calculé. Conserver le raisonnement, reprendre la division puis vérifier en multipliant le résultat par 6.

Erreur de méthode

Utiliser 8^3 pour un podium alors qu'une personne ne peut pas occuper deux places. Écrire les choix restants : 8, 7, 6.

Incompréhension de la notion

Traiter AB et BA comme deux équipes. Revenir à deux personnes concrètes et décrire ce qui change, ou ne change pas, quand les noms sont inversés. Pour un podium, les places changeraient le résultat.

Autres points à surveiller. Ne pas additionner des cas qui se recouvrent sans correction ; ne pas oublier le groupe vide ; ne pas confondre exactement et au moins ; ne pas mélanger groupes et listes dans une fraction de probabilité ; ne pas appliquer la loi binomiale sans vérifier les conditions de répétition.

19.2 Auto-évaluation sans note

Pour chaque affirmation, écrire « seule », « avec un indice » ou « à reprendre ».

- Je sais expliquer pourquoi un exemple exige une addition ou un produit.
- Je sais distinguer un code, un podium, un rangement et un groupe.
- Je sais simplifier une fraction de factorielles et calculer $\binom{n}{k}$.
- Je sais expliquer la symétrie, Pascal et la somme des coefficients.
- Je sais utiliser le complément pour « au moins un ».
- Je sais justifier une probabilité à partir d'issues équiprobables.

Pour un point « à reprendre », refaire un exemple avec trois objets, puis une question correspondante des exercices. Une formule retenue sans son sens doit être retravaillée sur un petit cas.

19.3 Questions à reprendre sans le cours

Le lendemain – 5 min. Pourquoi 3^2 ne compte-t-il pas les duos parmi 3 personnes ? Combien de codes de deux chiffres binaires existe-t-il ? Expliquer $\binom{4}{0}$. *Indice : ordre, répétition, puis choix vide.*

Trois jours après – 5 min. Parmi 6 personnes, combien de groupes de 2 ? Combien d'attributions de deux rôles distincts ? Expliquer le rapport des deux nombres. *Indice : chaque groupe a deux ordres.*

Une semaine après – 10 min. Compter les mots de longueur 5 sur $\{0, 1\}$ avec exactement deux 1, puis au moins un 1. Retrouver la relation de Pascal en distinguant les choix qui contiennent un élément donné. *Indice : positions, complément, puis deux cas disjoints.*

Pour poursuivre. Refaire les exercices 6, 9 et la synthèse A–B en justifiant les méthodes avant d'approfondir les probabilités.

20 Complément facultatif : choisir avec répétition, sans ordre

Statut. Les combinaisons avec répétition sont proposées comme approfondissement possible dans le programme retenu. Cette fiche peut être laissée de côté lors d’une première lecture.

20.1 Un exemple qui ne rentre pas dans la formule habituelle

On choisit 3 boules de glace parmi 2 parfums, vanille V et chocolat C. Les parfums peuvent se répéter, et l’ordre des boules ne compte pas. Les compositions possibles sont VVV, VVC, VCC et CCC : il y en a 4. On ne compte ni des listes (VVC et VCV sont la même composition), ni des parties (un parfum peut être choisi plusieurs fois).

20.2 Coder les quantités par des étoiles et des séparateurs

Pour 3 parfums dans l’ordre fixé vanille, chocolat, fraise, le choix de 2 vanille, 0 chocolat et 1 fraise peut être codé par

$$\star\star || \star.$$

Les étoiles représentent les boules ; les deux barres séparent les trois parfums. Deux barres voisines signifient zéro boule pour le parfum intermédiaire. Une barre au début ou à la fin permet aussi une quantité nulle.

En général, pour $n \geq 1$ types d’objets et $k \geq 0$ objets choisis avec répétition sans limite de stock, il faut k étoiles et $n - 1$ barres. Cela fait $n + k - 1$ positions. Choisir les k positions des étoiles détermine toutes les quantités et réciproquement. Le nombre de choix est donc

$$\boxed{\binom{n+k-1}{k}}.$$

Pour 3 boules parmi 2 parfums, on retrouve $\binom{4}{3} = 4$. Pour 3 boules parmi 3 parfums, on obtient $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$ compositions.

À retenir

Cette formule suppose un ordre indifférent, des répétitions autorisées et l’absence de limite de stock pour chaque type. Elle ne remplace pas $\binom{n}{k}$ pour des groupes de personnes distinctes.

20.3 Entraînement facultatif

Compétence : reconnaître un choix avec répétition. Prérequis : codage par étoiles et barres. On choisit 2 biscuits parmi 3 sortes disponibles sans limite de stock. Donner d’abord un choix contenant deux biscuits de la même sorte, puis dénombrer les compositions sans tenir compte de l’ordre.
Indice : coder deux étoiles et deux barres ; la correction figure dans le fascicule séparé.

21 Références

21.1 Références et portée du document

- Ministère de l'Éducation nationale, programme de spécialité de mathématiques de terminale générale, arrêté du 19 juillet 2019, Bulletin officiel spécial n° 8 du 25 juillet 2019 : texte de l'arrêté.
- Annexe officielle du programme de 2019, pages 6 et 7 du PDF : rubrique « Combinatoire et dénombrement ».
- Ministère de l'Éducation nationale, arrêté du 26 février 2026, Bulletin officiel n° 14 du 2 avril 2026. L'article 2 fixe l'entrée en application à la rentrée scolaire 2027–2028.

Références vérifiées le 8 septembre 2026. Si la session de bac visée est postérieure à 2027, vérifier le programme applicable à cette session.

Le cours couvre les objets et les propriétés de dénombrement du programme retenu, notamment les deux preuves de Pascal et la preuve par dénombrement de la somme des coefficients binomiaux. La fiche de probabilités fait le lien avec un autre chapitre ; elle ne constitue pas un cours complet sur la loi binomiale.

Compilation. Source autonome en UTF-8, compilable avec `pdflatex`. Deux passages sont nécessaires pour la table des matières et les renvois. Les figures sont produites par TikZ ; aucune image externe ni connexion internet n'est nécessaire pour compiler le document.