

Fiche d'histoire mathématique

Compter sans tout énumérer

Des rythmes de la poésie aux algorithmes

Comment lire cette fiche. Cette histoire n'est pas une liste de formules à apprendre. Elle montre pourquoi les mêmes idées — choisir, ordonner, compléter un cas, compter par étapes — sont apparues dans des contextes très différents. Les dates sont des repères ; plusieurs résultats ont été construits indépendamment dans plusieurs civilisations.

Table des matières

1	Un problème très ancien : compter des possibilités	1
2	L'Inde : rythmes, choix et triangle de nombres	1
3	La Chine et le monde arabo-musulman	2
4	1654 : Pascal, Fermat et les jeux de hasard	2
5	Récréations arithmétiques et mathématiques discrètes	2
6	Ce que l'histoire éclaire dans le cours	2
7	Pour aller plus loin	3

1 Un problème très ancien : compter des possibilités

Compter trois objets est facile. La difficulté apparaît lorsque le nombre de possibilités devient trop grand pour être écrit une à une : rythmes d'un poème, itinéraires, arrangements de personnes, issues d'un jeu. La combinatoire est née de cette nécessité de remplacer une longue liste par une règle qui garde le contrôle du raisonnement.

Période	Question qui fait avancer le dénombrement
Antiquité et Moyen Âge	Comment décrire toutes les configurations possibles ?
XVII ^e siècle	Comment compter les issues d'un jeu et partager une mise ?
XIX ^e siècle	Comment étudier des problèmes discrets et des chemins ?
XX ^e siècle à aujourd'hui	Comment faire effectuer ces dénombrements par une machine ?

2 L'Inde : rythmes, choix et triangle de nombres

Dans la tradition de la poésie sanskrite, un vers peut être décrit par une suite de syllabes courtes et longues. Pour une longueur fixée, chaque position offre deux possibilités : on retrouve la structure d'un mot binaire et le nombre de motifs est une puissance de 2.

Le grammairien Pingala, dans un traité ancien sur la prosodie, organise aussi les motifs selon le nombre de syllabes longues. Plus tard, des mathématiciens indiens décrivent une disposition triangulaire de nombres, appelée *Meru Prastara*. Les nombres intérieurs s'obtiennent en additionnant les deux nombres situés au-dessus :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Cette relation n'est donc pas née comme une décoration de tableau : elle répond à une question très concrète. Pour compter les choix qui contiennent un élément particulier, on sépare les choix qui le contiennent de ceux qui ne le contiennent pas.

Au XII^e siècle, Bhaskara II donne des règles explicites pour calculer les combinaisons. Il serait toutefois trompeur de chercher un unique « inventeur » du triangle : des formes comparables apparaissent aussi en Chine et dans le monde arabo-musulman.

3 La Chine et le monde arabo-musulman

En Chine, Jia Xian, Yang Hui puis Chu Shih-chieh utilisent des triangles de coefficients pour développer les puissances de $(a + b)^n$, extraire des racines et organiser des calculs. Une ligne de ce triangle contient les coefficients qui apparaissent dans le binôme ; sa somme vaut 2^n , ce qui correspond au choix indépendant de l'une des deux possibilités à chacune des n positions.

Dans le monde arabo-musulman, Al-Karaji et As-Samaw'al travaillent sur les puissances et les coefficients. À Marrakech, Ibn Mun'im étudie au XII^e siècle les permutations, les arrangements et les combinaisons pour résoudre notamment un problème de linguistique : combien de mots peut-on former avec certaines lettres ? Le contexte change, mais la méthode reste reconnaissable : définir ce qui est distingué, puis organiser les cas.

4 1654 : Pascal, Fermat et les jeux de hasard

Au XVII^e siècle, les jeux de dés et les parties interrompues posent une question nouvelle : comment partager équitablement une mise lorsque la partie n'est pas terminée ? En 1654, Blaise Pascal et Pierre de Fermat échangent sur le problème des partis.

L'idée décisive consiste à regarder les issues futures possibles. Pour chacune, on demande quel joueur gagnerait, puis on compte ces issues. Pascal relie cette méthode au triangle arithmétique, tandis que Fermat raisonne par énumération organisée. La probabilité devient ainsi liée au dénombrement :

$$\text{probabilité} = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}} \quad \text{lorsque les issues sont équiprobables.}$$

Le triangle de Pascal, les coefficients binomiaux et les probabilités ne sont donc pas trois chapitres sans rapport : ils répondent à la même question, compter des choix et des résultats.

5 Récréations arithmétiques et mathématiques discrètes

Au XIX^e siècle, les problèmes de chemins, de casse-têtes et de jeux deviennent un laboratoire pour les raisonnements par récurrence et les formules de dénombrement. Édouard Lucas popularise la tour de Hanoï et montre que le nombre minimal de déplacements suit la relation

$$T_n = 2T_{n-1} + 1, \quad T_n = 2^n - 1.$$

Henri Delannoy étudie des chemins sur un quadrillage, parfois avec des pas diagonaux. Ces problèmes apprennent à décomposer une situation en derniers choix possibles, exactement comme dans une relation de Pascal.

Au XX^e siècle, les ordinateurs donnent une nouvelle importance à la combinatoire. Un ordinateur manipule des bits 0 et 1, explore des graphes, teste des mots de passe et construit des arbres de possibilités. Le nombre de cas peut croître si vite que l'on ne peut plus tout tester : c'est l'*explosion combinatoire*. Concevoir un algorithme revient alors souvent à éviter les listes inutiles, à mémoriser les sous-problèmes ou à compter avant de calculer.

6 Ce que l'histoire éclaire dans le cours

- Une puissance q^n traduit n choix successifs parmi q possibilités.
- Une factorielle apparaît lorsque les positions ont toutes un rôle et que les choix diminuent.
- Un coefficient binomial compte un groupe lorsque l'ordre ne compte pas.
- La relation de Pascal vient d'une séparation en deux cas disjoints.
- Une probabilité calculée par dénombrement dépend d'abord de la description correcte des issues.

À retenir. Les formules ne sont pas tombées du ciel. Elles condensent des stratégies de raisonnement : faire des choix successifs, séparer des cas, compter le contraire ou reconnaître que plusieurs listes représentent le même objet.

7 Pour aller plus loin

- MacTutor, *History of combinatorics* et notices sur les mathématiques indiennes, chinoises et arabo-musulmanes : History Topics.
- MacTutor, notice sur Blaise Pascal et histoire du calcul des probabilités : Blaise Pascal.
- Pour le lien avec l'informatique, voir l'histoire de l'algorithmique dans la fiche *Algorithmique et programmation* du même dossier.