

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Corrections expliquées

Manipulation des vecteurs, des droites et des plans de l'espace

Utilisation. Cherche d'abord dans le fascicule du cours. Lis seulement l'indice si tu es bloquée, puis compare ta démarche avec la correction complète. Les exercices sont des créations pédagogiques et ne sont pas présentés comme des sujets officiels du baccalauréat.

Table des matières

1	Diagnostic : réponses et rappels ciblés	3
2	Corrections des exercices 1 à 3 : vecteurs et produits	4
3	Corrections des exercices 4 à 6 : droites et plans paramétriques	5
4	Corrections des exercices 7 à 8 : équations et intersection	7
5	Corrections des exercices 9 et 10 : synthèse	8
6	Rappels différés : réponses	10

1 Diagnostic : réponses et rappels ciblés

Correction D1

Le point $A(2; -1; 3)$ a pour première coordonnée $x_A = 2$, deuxième coordonnée $y_A = -1$ et troisième coordonnée $z_A = 3$. L'ordre est important : les trois nombres correspondent à trois axes différents.

Correction D2

On utilise « arrivée moins départ » :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) \\ &= (4 - 1; 0 - 2; 3 - (-1)) \\ &= (3; -2; 4).\end{aligned}$$

La troisième coordonnée est positive, car $3 - (-1) = 3 + 1 = 4$.

Correction D3

On multiplie d'abord chaque coordonnée par 2 :

$$2(1; -2; 3) = (2; -4; 6).$$

Puis on additionne coordonnée par coordonnée :

$$(2; -4; 6) + (-1; 4; 0) = (1; 0; 6).$$

Correction D4

On cherche un facteur commun. On constate que

$$(-4; 2; 0) = -2(2; -1; 0).$$

Le même facteur -2 fonctionne pour les trois coordonnées. Les vecteurs sont donc colinéaires, avec des sens opposés.

Correction D5

$$3t - 5 = 7 \quad \Longleftrightarrow \quad 3t = 12 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 4.$$

On ajoute 5 aux deux membres, puis on divise les deux membres par 3.

Correction D6

On remplace $x = 1$, $y = 2$ et $z = 4$ dans l'équation :

$$x - y + z - 3 = 1 - 2 + 4 - 3 = 0.$$

L'égalité est vraie, donc $M(1; 2; 4)$ appartient au plan.

Point de méthode

Un diagnostic qui révèle une erreur de signe ou de coordonnées donne une piste précise : reprendre uniquement ce calcul avant de continuer.

2 Corrections des exercices 1 à 3 : vecteurs et produits

Correction 1 – Coordonnées et relation de Chasles

a) On calcule arrivée moins départ :

$$\overrightarrow{AB} = (1 - (-2); -3 - 1; 5 - 3) = (3; -4; 2),$$

$$\overrightarrow{BC} = (4 - 1; 0 - (-3); 2 - 5) = (3; 3; -3),$$

$$\overrightarrow{AC} = (4 - (-2); 0 - 1; 2 - 3) = (6; -1; -1).$$

b) Additionnons les deux déplacements successifs :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (3; -4; 2) + (3; 3; -3) = (6; -1; -1).$$

Ce résultat est exactement $\overrightarrow{AC}$. On a donc vérifié $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

c) Le milieu est obtenu par trois moyennes :

$$I = \left(\frac{-2+4}{2}; \frac{1+0}{2}; \frac{3+2}{2} \right) = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{5}{2} \right).$$

Le résultat peut comporter des fractions : cela ne signale pas une erreur.

Correction 2 – Colinéarité et alignement

a) On observe que

$$(-6; 3; -9) = -3(2; -1; 3).$$

Le même facteur -3 convient aux trois coordonnées. Les vecteurs sont donc colinéaires.

b)

$$\overrightarrow{PQ} = (3 - 1; 1 - 2; 3 - 0) = (2; -1; 3),$$

$$\overrightarrow{PR} = (-5 - 1; 5 - 2; -9 - 0) = (-6; 3; -9).$$

c) On a

$$\overrightarrow{PR} = -3\overrightarrow{PQ}.$$

Les deux vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont colinéaires. Comme ils partent tous les deux de P , les points P, Q, R sont alignés. Le facteur négatif indique que Q et R sont de part et d'autre de P sur la même droite.

Correction 3 – Distance et orthogonalité

a)

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 1; 2 - (-2); -3 - 0) = (3; 4; -3).$$

La distance est la norme de ce vecteur :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{3^2 + 4^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{9 + 16 + 9} = \sqrt{34}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= 2 \times 1 + (-1) \times 2 + 2 \times 0 \\ &= 2 - 2 + 0 = 0. \end{aligned}$$

c) Le produit scalaire est nul : les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

3 Corrections des exercices 4 à 6 : droites et plans paramétriques

Correction 4 – Équation paramétrique d'une droite

a)

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 1; -1 - 2; 2 - (-1)) = (2; -3; 3).$$

Ce vecteur est non nul, donc il peut diriger la droite.

b) En partant de A et en ajoutant $t\overrightarrow{AB}$, on obtient

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 - 3t, \\ z = -1 + 3t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

c) Pour $M(5; -4; 5)$, la première équation donne

$$5 = 1 + 2t \iff t = 2.$$

Avec $t = 2$, les deux autres coordonnées valent

$$2 - 3 \times 2 = -4, \quad -1 + 3 \times 2 = 5.$$

La même valeur convient partout : $M \in d$.

d) Pour $N(4; -2; 4)$, la première équation donne

$$4 = 1 + 2t \iff t = \frac{3}{2}.$$

Mais alors la deuxième coordonnée devrait être

$$2 - 3 \times \frac{3}{2} = 2 - \frac{9}{2} = -\frac{5}{2},$$

et non -2 . La valeur de t ne convient donc pas aux trois équations : $N \notin d$. Vérifier les trois coordonnées est indispensable.

Correction 5 – Intersection de deux droites

a) Les vecteurs directeurs sont

$$\vec{u} = (1; -1; 2), \quad \vec{v} = (-2; 2; 0).$$

Ils ne sont pas colinéaires : le facteur -2 qui convient aux deux premières coordonnées ne convient pas à la troisième, car $(-2) \times 2 = -4 \neq 0$.

b) Pour un point commun, les coordonnées doivent être les mêmes :

$$\begin{cases} 1 + t = 4 - 2s, \\ 2 - t = -1 + 2s, \\ 2t = 2. \end{cases}$$

La troisième équation donne $t = 1$. La première devient

$$2 = 4 - 2s \iff s = 1.$$

La deuxième est alors vérifiée :

$$2 - 1 = 1 = -1 + 2 \times 1.$$

Le point commun est

$$I = (1 + 1; 2 - 1; 2 \times 1) = (2; 1; 2).$$

c) Les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires et les droites ont un point commun. Elles sont donc sécantes en $I(2; 1; 2)$.

Correction 6 – Représentation paramétrique d'un plan

a) Si $\vec{v}$ était un multiple de $\vec{u}$, sa première coordonnée serait le même multiple de 1. Or la première coordonnée de $\vec{v}$ est 0 tandis que la deuxième vaut 1 : aucun même facteur ne fonctionne. Les vecteurs ne sont pas colinéaires.

b) Pour $M(x; y; z)$, on écrit

$$M = (1; 0; 2) + s(1; 1; 0) + t(0; 1; 1).$$

Coordonnée par coordonnée :

$$\begin{cases} x = 1 + s, \\ y = s + t, \\ z = 2 + t, \end{cases} \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

c) Pour $Q(2; 3; 4)$, la première équation impose $s = 1$ et la troisième impose $t = 2$. La deuxième donne alors $s + t = 1 + 2 = 3$. Toutes les équations sont vérifiées : $Q \in \mathcal{P}$.

d) Pour $R(2; 4; 6)$, la première équation impose $s = 1$ et la troisième impose $t = 4$. La deuxième donnerait alors $s + t = 1 + 4 = 5$, et non 4. Il n'existe donc pas de couple (s, t) convenable : $R \notin \mathcal{P}$.

4 Corrections des exercices 7 à 8 : équations et intersection

Correction 7 – Équation cartésienne d'un plan

a)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (2 - 1; 1 - 0; 2 - 2) = (1; 1; 0), \\ \overrightarrow{AC} &= (1 - 1; 1 - 0; 3 - 2) = (0; 1; 1).\end{aligned}$$

b) On cherche $\vec{n} = (a; b; c)$ orthogonal aux deux directions.

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \iff a + b = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 \iff b + c = 0.\end{aligned}$$

On choisit par exemple $b = -1$. Alors $a = 1$ et $c = 1$, d'où

$$\vec{n} = (1; -1; 1).$$

c) Le plan passe par $A(1; 0; 2)$, donc

$$\begin{aligned}1(x - 1) - 1(y - 0) + 1(z - 2) &= 0, \\ x - y + z - 3 &= 0.\end{aligned}$$

d) Pour B , on obtient $2 - 1 + 2 - 3 = 0$. Pour C , on obtient $1 - 1 + 3 - 3 = 0$. Les deux points vérifient l'équation ; avec le point A déjà utilisé, l'équation est contrôlée.

Correction 8 – Intersection d'une droite et d'un plan

a) Le vecteur directeur de d est lu dans les coefficients de t :

$$\vec{u} = (1; 1; 1).$$

Dans l'équation $x - y + z - 3 = 0$, un vecteur normal est

$$\vec{n} = (1; -1; 1).$$

b)

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 1 \neq 0.$$

La droite n'est donc pas parallèle au plan : elle le rencontre en un unique point.

c) On remplace les coordonnées de la droite dans l'équation du plan :

$$\begin{aligned}x - y + z - 3 &= t - (1 + t) + t - 3 \\ &= t - 4.\end{aligned}$$

Il faut donc résoudre $t - 4 = 0$, ce qui donne $t = 4$. Le point est

$$I(4; 5; 4).$$

d) Le point est sur la droite par construction, avec $t = 4$. Dans le plan :

$$4 - 5 + 4 - 3 = 0.$$

Il appartient bien aux deux objets. La droite et le plan sont donc sécants en $I(4; 5; 4)$.

5 Corrections des exercices 9 et 10 : synthèse

Correction 9 – Intersection de deux plans

a) Les vecteurs normaux sont

$$\vec{n} = (1; 1; 1), \quad \vec{n}' = (1; -1; 0).$$

Ils ne sont pas colinéaires : la troisième coordonnée de $\vec{n}'$ est nulle, mais celle de $\vec{n}$ ne l'est pas. Les plans ne sont donc pas parallèles ; ils sont sécants.

b) Le système est

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

La deuxième équation donne $y = x - 1$. En remplaçant dans la première :

$$\begin{aligned} x + (x - 1) + z &= 3, \\ z &= 4 - 2x. \end{aligned}$$

Il reste une variable libre. Posons $x = 1 + t$, avec $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$y = t, \quad z = 2 - 2t.$$

c) L'intersection est la droite

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = t, \\ z = 2 - 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Elle passe par $I(1; 0; 2)$ pour $t = 0$, avec vecteur directeur $(1; 1; -2)$.

d) Pour $t = 0$, le point $I(1; 0; 2)$ vérifie

$$1 + 0 + 2 = 3, \quad 1 - 0 = 1.$$

Il appartient aux deux plans. La représentation paramétrique est donc contrôlée.

Correction 10 – Synthèse : trajectoire dans un plan

a) Pour $t = 0$, le point de départ est

$$A(1; 2; 1).$$

Les coefficients de t donnent un vecteur directeur

$$\vec{u} = (1; 0; -1).$$

b) Dans l'équation de l'écran :

$$2 \times 1 - 2 + 1 - 3 = -2 \neq 0.$$

Le point de départ n'est pas sur l'écran.

c) On remplace les coordonnées de la trajectoire dans $2x - y + z - 3 = 0$:

$$\begin{aligned} 2(1 + t) - 2 + (1 - t) - 3 &= 0, \\ t - 2 &= 0, \\ t &= 2. \end{aligned}$$

d) Pour $t = 2$,

$$x = 1 + 2 = 3, \quad y = 2, \quad z = 1 - 2 = -1.$$

Le point d'entrée est donc $I(3; 2; -1)$. Phrase-réponse : *la trajectoire rencontre l'écran au point $I(3; 2; -1)$, lorsque le paramètre vaut $t = 2$.*

e) Contrôle dans le plan :

$$2 \times 3 - 2 + (-1) - 3 = 6 - 2 - 1 - 3 = 0.$$

Le point obtenu appartient bien à l'écran.

6 Rappels différés : réponses

6.1 Le lendemain

Avec $A(0; 1; -2)$ et $B(3; -1; 4)$,

$$\overrightarrow{AB} = (3; -2; 6).$$

Sa norme est

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 4 + 36} = 7.$$

Le milieu est

$$I = \left(\frac{0+3}{2}; \frac{1+(-1)}{2}; \frac{-2+4}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}; 0; 1 \right).$$

6.2 Trois jours après

On a

$$\vec{v} = (-2; -4; 2) = -2(1; 2; -1) = -2\vec{u}.$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

Pour les deux autres vecteurs :

$$\vec{w} \cdot \vec{q} = 1 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times (-1) = 1 - 1 = 0.$$

Ils sont orthogonaux.

6.3 Une semaine après

Un vecteur directeur de la droite est

$$\overrightarrow{AB} = (0 - 2; 3 - (-1); 4 - 0) = (-2; 4; 4).$$

On peut le simplifier en prenant $(-1; 2; 2)$. Une représentation est donc

$$\begin{cases} x = 2 - t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pour $M(4; -5; -4)$, la première équation donne

$$4 = 2 - t \quad \Longleftrightarrow \quad t = -2.$$

Avec cette valeur,

$$-1 + 2(-2) = -5, \quad 2(-2) = -4.$$

La même valeur fonctionne partout : M appartient à la droite.

Enfin, dans $2x - y + z - 4 = 0$, les coefficients de x, y, z ne sont pas tous nuls. Le vecteur normal est $(2; -1; 1)$, et une équation de cette forme décrit un plan de l'espace.

Point de méthode

Une correction complète doit toujours revenir au sens géométrique : un paramètre produit un point, un système décrit une intersection et un produit scalaire nul traduit une orthogonalité.