

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Manipulation des vecteurs, des droites et des plans de l'espace

Décrire une position, une direction et une relation dans l'espace

Objectifs

- Calculer et interpréter les coordonnées d'un vecteur dans un repère de l'espace.
- Utiliser la colinéarité, la norme et le produit scalaire pour justifier une propriété géométrique.
- Décrire une droite ou un plan par une représentation paramétrique ou cartésienne.
- Déterminer une position relative et calculer une intersection en rédigeant les étapes utiles.

Cadre du cours. Ce document est conçu pour la préparation du baccalauréat général avec spécialité mathématiques. Il travaille les compétences communes de géométrie de l'espace, sans dépendre d'une série, d'une option ou d'un sujet officiel particulier. Les exercices sont créés pour ce cours.

Organisation conseillée. Prévoir six séances de 35 à 45 minutes, avec une pause courte si nécessaire :

1. diagnostic, coordonnées et vecteurs ;
2. opérations, colinéarité, distances et produit scalaire ;
3. droites et positions relatives ;
4. plans, représentations paramétriques et équations cartésiennes ;
5. intersections d'une droite et d'un plan, puis de deux plans ;
6. exercice de synthèse, rédaction et rappel différé.

Les exercices sont dans ce fascicule avec leurs indices. Les corrections détaillées se trouvent dans le fascicule séparé **corrections.pdf**. Essaie une question, consulte son indice si nécessaire, puis seulement la correction.

Table des matières

1	Avant de commencer : diagnostic et rappels	3
2	1. Comprendre et calculer avec les vecteurs	4
3	2. Colinéarité, longueurs et produit scalaire	6
4	3. Décrire une droite de l'espace	8
5	4. Décrire un plan de l'espace	10
6	5. Droite et plan : trouver une intersection	13
7	6. Exercices gradués	15
8	Bilan, erreurs fréquentes et rappel différé	19

1 Avant de commencer : diagnostic et rappels

Durée indicative : 12 minutes, sans note et sans calculatrice. Ce diagnostic sert à repérer les prérequis utiles, pas à attribuer une note. Si une question bloque, écrire simplement « à revoir » et continuer. Les réponses sont dans le fascicule séparé des corrections.

- D1.** Dans un repère de l'espace, que signifie le point $A(2; -1; 3)$? Nommer ses trois coordonnées.
- D2.** Avec $A(1; 2; -1)$ et $B(4; 0; 3)$, calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.
- D3.** Simplifier le vecteur $2(1; -2; 3) + (-1; 4; 0)$.
- D4.** Les vecteurs $\vec{u} = (2; -1; 0)$ et $\vec{v} = (-4; 2; 0)$ sont-ils colinéaires? Justifier par un nombre multiplicatif.
- D5.** Résoudre l'équation $3t - 5 = 7$.
- D6.** Le point $M(1; 2; 4)$ appartient-il au plan d'équation $x - y + z - 3 = 0$? Traduire la question en un calcul.

1.1 Les rappels indispensables

Coordonnées. Un point de l'espace est repéré par trois nombres. Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le point $A(x_A; y_A; z_A)$ signifie que l'on part de l'origine O , que l'on se déplace de x_A unités selon le premier axe, de y_A unités selon le deuxième, puis de z_A unités selon le troisième.

Calcul littéral. Une équation se transforme en conservant l'égalité. Par exemple :

$$3t - 5 = 7 \quad \Longleftrightarrow \quad 3t = 12 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 4.$$

Le symbole $\Longleftrightarrow$ signifie que les deux phrases ont les mêmes solutions.

Produit par un nombre. Pour multiplier un vecteur par un nombre, on multiplie chacune de ses coordonnées. Ainsi

$$2(1; -2; 3) = (2; -4; 6).$$

Équation d'un plan. Pour vérifier si un point appartient au plan $ax + by + cz + d = 0$, on remplace x , y et z par les coordonnées du point. Si l'égalité est vraie, le point appartient au plan.

À retenir

Dans toute la géométrie de l'espace, une coordonnée correspond à une direction. Lire les trois coordonnées séparément avant de commencer un calcul évite de mélanger les axes.

2 1. Comprendre et calculer avec les vecteurs

2.1 L'idée essentielle : un vecteur décrit un déplacement

Un vecteur ne représente pas seulement une flèche dessinée à un endroit précis. Il décrit un déplacement : une direction, un sens et une longueur. On peut donc faire glisser un vecteur sans le changer.

Si A et B sont deux points, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ décrit le déplacement qui mène de A à B . Dans un repère, ses coordonnées se calculent en faisant « arrivée moins départ » dans chaque direction :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$$

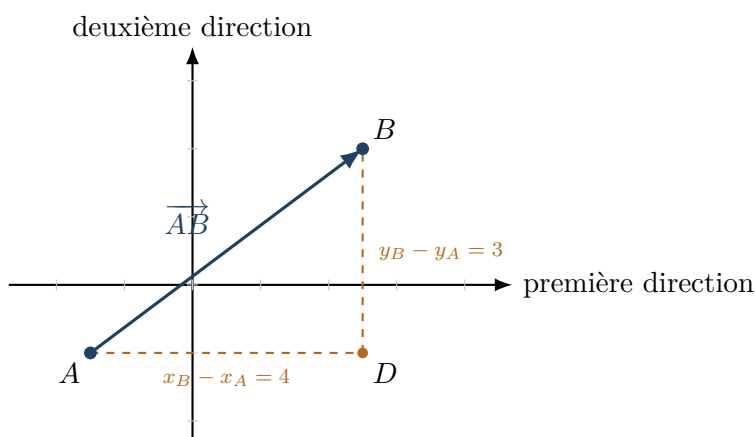


FIGURE 1 – Pour visualiser « arrivée moins départ », on décompose ici un déplacement dans un plan : +4 dans une direction puis +3 dans l'autre. Dans l'espace, on ajoute de la même façon la troisième coordonnée.

Exemple entièrement détaillé

On considère $A(1; -2; 3)$ et $B(4; 0; -1)$. Pour aller de A vers B , on compare chaque coordonnée :

$$x_B - x_A = 4 - 1 = 3,$$

$$y_B - y_A = 0 - (-2) = 2,$$

$$z_B - z_A = -1 - 3 = -4.$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{AB} = (3; 2; -4).$$

Le déplacement augmente la première coordonnée de 3, la deuxième de 2 et diminue la troisième de 4.

2.2 Égalité, addition et relation de Chasles

Deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont les mêmes coordonnées. Ils peuvent être placés à des endroits différents : ce qui compte est le déplacement décrit.

On additionne deux vecteurs coordonnée par coordonnée :

$$(a; b; c) + (a'; b'; c') = (a + a'; b + b'; c + c').$$

De même, pour un nombre réel λ ,

$$\lambda(a; b; c) = (\lambda a; \lambda b; \lambda c).$$

Pour trois points A , B et C , la **relation de Chasles** traduit un trajet en deux étapes :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}.$$

Elle est utile pour remplacer un déplacement direct par deux déplacements successifs, ou l'inverse.

Exemple entièrement détaillé

On donne $A(-2; 1; 3)$, $B(1; -3; 5)$ et $C(4; 0; 2)$. Calculons les deux vecteurs qui composent le trajet de A à C :

$$\overrightarrow{AB} = (1 - (-2); -3 - 1; 5 - 3) = (3; -4; 2),$$

$$\overrightarrow{BC} = (4 - 1; 0 - (-3); 2 - 5) = (3; 3; -3).$$

Alors

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (3; -4; 2) + (3; 3; -3) = (6; -1; -1).$$

Calculons directement :

$$\overrightarrow{AC} = (4 - (-2); 0 - 1; 2 - 3) = (6; -1; -1).$$

Les deux calculs donnent bien le même vecteur, ce qui vérifie Chasles.

2.3 Milieu et combinaison de vecteurs

Le milieu I d'un segment $[AB]$ est le point situé à mi-chemin entre A et B . Ses coordonnées sont les moyennes des coordonnées de A et de B :

$$\boxed{I \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right)}.$$

Cette formule vient de l'égalité

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}.$$

Plus généralement, une expression comme $2\vec{u} - 3\vec{v}$ se calcule en effectuant d'abord les multiplications, puis l'addition coordonnée par coordonnée.

Exemple entièrement détaillé

Soient $A(2; -1; 4)$ et $B(-2; 3; 0)$. Le milieu I est

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{2 + (-2)}{2}; \frac{-1 + 3}{2}; \frac{4 + 0}{2} \right) \\ &= (0; 1; 2). \end{aligned}$$

Contrôle :

$$\overrightarrow{AI} = (0 - 2; 1 - (-1); 2 - 4) = (-2; 2; -2),$$

et

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(-4; 4; -4) = (-2; 2; -2).$$

Les deux vecteurs sont égaux : le point calculé est bien le milieu.

À retenir

Pour calculer $\overrightarrow{AB}$, écrire systématiquement « arrivée moins départ ». Pour additionner des vecteurs, ne jamais mélanger les coordonnées : première avec première, deuxième avec deuxième, troisième avec troisième.

3 2. Colinéarité, longueurs et produit scalaire

3.1 Reconnaître des vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe un nombre réel λ tel que

$$\vec{v} = \lambda \vec{u}.$$

Ils ont alors la même direction, éventuellement en sens opposé. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur, car $\vec{0} = 0\vec{u}$.

Pour tester la colinéarité, on cherche un même facteur dans les trois coordonnées. Il faut éviter de diviser par une coordonnée qui serait nulle. L'égalité coordonnée par coordonnée est plus sûre :

$$(v_1; v_2; v_3) = \lambda(u_1; u_2; u_3)$$

signifie les trois égalités $v_1 = \lambda u_1$, $v_2 = \lambda u_2$ et $v_3 = \lambda u_3$.

Pour trois points A , B et C ,

$$A, B, C \text{ sont alignés} \iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinéaires.}$$

Exemple entièrement détaillé

On considère $\vec{u} = (2; -1; 3)$ et $\vec{v} = (-6; 3; -9)$. On cherche un facteur à partir de la première coordonnée :

$$-6 = (-3) \times 2.$$

On vérifie les deux autres coordonnées :

$$(-3) \times (-1) = 3, \quad (-3) \times 3 = -9.$$

Donc $\vec{v} = -3\vec{u}$, et les deux vecteurs sont colinéaires. Le facteur négatif signifie que leurs sens sont opposés.

3.2 Norme et distance

La **norme** d'un vecteur est sa longueur. Si $\vec{u} = (a; b; c)$, alors

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Cette formule est une application du théorème de Pythagore dans l'espace.

La distance entre deux points est la norme du vecteur qui les relie :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Exemple entièrement détaillé

Pour $A(1; -2; 0)$ et $B(4; 2; -3)$,

$$\overrightarrow{AB} = (3; 4; -3).$$

La distance vaut donc

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{3^2 + 4^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{9 + 16 + 9} = \sqrt{34}. \end{aligned}$$

On peut vérifier que la distance est positive, comme toute longueur.

3.3 Produit scalaire et orthogonalité

Pour $\vec{u} = (a; b; c)$ et $\vec{v} = (a'; b'; c')$, leur **produit scalaire** est

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb' + cc'.$$

Le symbole « $\cdot$ » ne désigne pas une multiplication coordonnée par coordonnée : il donne un seul nombre.

Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Par extension, deux droites sont perpendiculaires lorsqu'elles ont des vecteurs directeurs orthogonaux et se coupent.

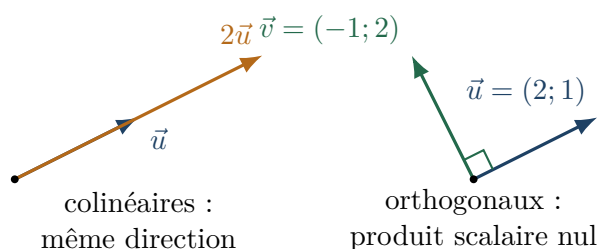


FIGURE 2 – Deux lectures géométriques dans un plan : un facteur commun conserve la direction (colinéarité), tandis que des directions perpendiculaires ont un produit scalaire nul. Les mêmes critères s'utilisent avec trois coordonnées.

Exemple entièrement détaillé

Soient $\vec{u} = (2; -1; 2)$ et $\vec{v} = (1; 2; 0)$. On calcule :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= 2 \times 1 + (-1) \times 2 + 2 \times 0 \\ &= 2 - 2 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Les vecteurs sont donc orthogonaux. L'annulation résulte des trois produits avec leurs signes ; il ne faut pas remplacer le produit scalaire par une somme des coordonnées.

À retenir

Colinéarité : un seul facteur λ doit convenir aux trois coordonnées. Norme : on élève chaque coordonnée au carré avant d'additionner. Orthogonalité : le produit scalaire doit être nul.

4 3. Décrire une droite de l'espace

4.1 Représentation paramétrique

Une droite est déterminée par un point et une direction. Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point et $\vec{u} = (a; b; c)$ un vecteur directeur non nul. La droite d passant par A et dirigée par $\vec{u}$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels qu'il existe un réel t vérifiant

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u}.$$

Ses équations paramétriques sont donc

$$\begin{cases} x = x_A + ta, \\ y = y_A + tb, \\ z = z_A + tc, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

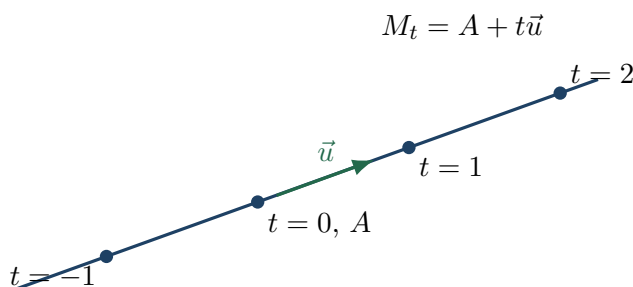


FIGURE 3 – Sur une droite paramétrée, $t = 0$ donne le point de départ A , $t = 1$ donne $A + \vec{u}$, et les valeurs négatives indiquent l'autre sens.

Le paramètre t indique où se trouve le point sur la droite : $t = 0$ correspond à A , $t = 1$ correspond au point obtenu en ajoutant une fois le vecteur directeur, et des valeurs négatives donnent l'autre sens.

Exemple entièrement détaillé

Déterminons une représentation paramétrique de la droite passant par $A(1; 2; -1)$ et $B(3; -1; 2)$.

Un vecteur directeur est

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 1; -1 - 2; 2 - (-1)) = (2; -3; 3).$$

On part de A et on ajoute $t\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 - 3t, \\ z = -1 + 3t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Contrôles : pour $t = 0$, on retrouve A ; pour $t = 1$, on obtient B . Ces deux contrôles vérifient à la fois le point de départ et la direction.

4.2 Vérifier qu'un point appartient à une droite

Pour savoir si $P(x_P; y_P; z_P)$ appartient à d , on cherche une même valeur de t dans les trois équations. Une valeur trouvée dans une seule équation ne suffit pas.

Méthode

1. Remplacer x , y et z par les coordonnées de P .
2. Résoudre les équations obtenues pour trouver un éventuel paramètre t .
3. Vérifier que la même valeur convient aux trois coordonnées.

Dans l'exemple précédent, testons $P(5; -4; 5)$. La première équation donne $5 = 1 + 2t$, donc $t = 2$. Les deux autres donnent alors $2 - 3 \times 2 = -4$ et $-1 + 3 \times 2 = 5$. Le point appartient donc à la droite.

4.3 Positions relatives de deux droites

Pour comparer deux droites, on commence par comparer leurs vecteurs directeurs.

Situation	Ce que l'on constate dans l'espace
Droites confondues	Elles ont la même direction et possèdent un point commun ; elles ont alors tous leurs points en commun.
Droites parallèles distinctes	Leurs vecteurs directeurs sont colinéaires, mais elles n'ont aucun point commun.
Droites sécantes	Elles ont un point commun et leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.
Droites gauches	Elles n'ont aucun point commun et leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires ; elles ne sont pas dans un même plan.

Pour chercher un point commun, on égalise les coordonnées des deux représentations et on résout le système. Il faut obtenir une valeur de t et une valeur de s qui conviennent aux trois coordonnées.

Exemple entièrement détaillé

On considère

$$d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{et} \quad d' : \begin{cases} x = 4 - 2s \\ y = -1 + 2s \\ z = 2 \end{cases}.$$

Les vecteurs directeurs sont $(1; -1; 2)$ et $(-2; 2; 0)$, qui ne sont pas colinéaires. Les droites sont donc soit sécantes, soit gauches.

On cherche un point commun. La troisième coordonnée donne

$$2t = 2, \quad \text{donc} \quad t = 1.$$

La première coordonnée devient

$$1 + 1 = 4 - 2s \quad \Longleftrightarrow \quad 2 = 4 - 2s \quad \Longleftrightarrow \quad s = 1.$$

La deuxième coordonnée est bien vérifiée :

$$2 - 1 = 1 = -1 + 2 \times 1.$$

Le point commun est donc $I(2; 1; 2)$, obtenu pour $t = s = 1$. Les deux droites sont sécantes.

À retenir

Une droite se décrit par « un point + un paramètre fois un vecteur directeur ». Pour un point commun, les paramètres peuvent être différents sur les deux droites : on doit chercher t et s , pas imposer $t = s$.

5 4. Décrire un plan de l'espace

5.1 Un plan avec deux directions

Un plan est déterminé par un point et deux directions non colinéaires. Soient A un point, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Le plan $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M tels qu'il existe deux réels s et t avec

$$\overrightarrow{AM} = s\vec{u} + t\vec{v}.$$

On obtient la représentation paramétrique

$$M = A + s\vec{u} + t\vec{v}, \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Les deux paramètres sont nécessaires : un seul paramètre décrit une droite, deux paramètres permettent de se déplacer dans deux directions du plan.

Exemple entièrement détaillé

On prend $A(1; 0; 2)$, $\vec{u} = (1; 1; 0)$ et $\vec{v} = (0; 1; 1)$. Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, car la première coordonnée de $\vec{v}$ est nulle alors que celle de $\vec{u}$ ne l'est pas.

Pour un point $M(x; y; z)$ du plan,

$$M = (1; 0; 2) + s(1; 1; 0) + t(0; 1; 1).$$

En calculant coordonnée par coordonnée :

$$\begin{cases} x = 1 + s, \\ y = s + t, \\ z = 2 + t, \end{cases} \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Vérifions que $Q(2; 3; 4)$ appartient au plan. La première équation impose $2 = 1 + s$, donc $s = 1$. La troisième impose $4 = 2 + t$, donc $t = 2$. La deuxième donne alors $s + t = 1 + 2 = 3$, ce qui convient. Ainsi $Q \in \mathcal{P}$.

5.2 Équation cartésienne et vecteur normal

Un vecteur $\vec{n} = (a; b; c)$ est **normal** à un plan lorsqu'il est orthogonal à toutes les directions de ce plan. Une équation cartésienne du plan s'écrit

$$ax + by + cz + d = 0,$$

où $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$. Le vecteur $(a; b; c)$ est un vecteur normal.

Si le plan passe par $A(x_A; y_A; z_A)$, on peut écrire son équation à partir d'un vecteur normal :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Pour trouver un vecteur normal à partir de deux directions $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on cherche un vecteur $\vec{n} = (a; b; c)$ tel que

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{n} \cdot \vec{v} = 0.$$

Cela donne un petit système d'équations. Il n'est pas nécessaire de retenir une formule supplémentaire : on traduit simplement « orthogonal aux deux directions ».

Exemple entièrement détaillé

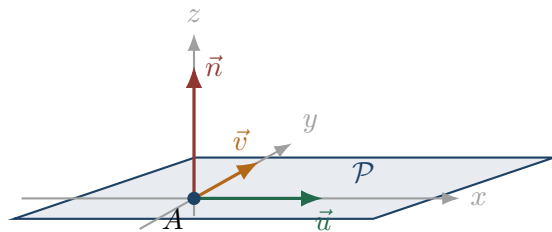


FIGURE 4 – Un plan est parcouru selon deux directions indépendantes $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Un vecteur normal $\vec{n}$ est perpendiculaire au plan. Schéma perspectif : les axes n'ont pas d'unité particulière.

Déterminons une équation du plan passant par $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 2)$ et $C(1; 1; 3)$.

Deux directions du plan sont

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1; 1; 0), \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0; 1; 1).$$

Cherchons $\vec{n} = (a; b; c)$. Les conditions d'orthogonalité donnent

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 &\iff a + b = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 &\iff b + c = 0. \end{aligned}$$

On peut choisir $b = -1$. Alors $a = 1$ et $c = 1$, donc $\vec{n} = (1; -1; 1)$.

Le plan passe par A , donc

$$\begin{aligned} 1(x - 1) - 1(y - 0) + 1(z - 2) &= 0, \\ x - y + z - 3 &= 0. \end{aligned}$$

On contrôle les trois points :

$$1 - 0 + 2 - 3 = 0, \quad 2 - 1 + 2 - 3 = 0, \quad 1 - 1 + 3 - 3 = 0.$$

L'équation obtenue est cohérente avec les données.

5.3 Vérifier l'appartenance à un plan

Pour un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, on remplace les trois coordonnées du point. Une seule égalité suffit, car l'équation décrit tout le plan.

Par exemple, pour le plan $x - y + z - 3 = 0$:

- $Q(2; 3; 4)$ appartient au plan car $2 - 3 + 4 - 3 = 0$;
- $R(2; 3; 5)$ n'y appartient pas car $2 - 3 + 5 - 3 = 1 \neq 0$.

5.4 Positions relatives de deux plans

Deux plans de l'espace peuvent être :

- confondus : ils ont une infinité de points communs, en fait tous leurs points ;
- parallèles distincts : ils n'ont aucun point commun ;
- sécants : leur intersection est une droite.

Pour le vérifier avec des équations, on peut résoudre le système formé par les deux équations. Si le système donne une droite à un paramètre, les plans sont sécants. S'il n'a aucune solution, ils sont parallèles distincts. S'ils ont la même équation après simplification, ils sont confondus.

Exemple entièrement détaillé

Cherchons l'intersection des plans

$$\mathcal{P} : x + y + z = 3, \quad \mathcal{P}' : x - y = 1.$$

La seconde équation donne $y = x - 1$. En remplaçant dans la première :

$$x + (x - 1) + z = 3 \iff z = 4 - 2x.$$

On pose $x = 1 + t$, avec $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$y = t, \quad z = 2 - 2t.$$

L'intersection est donc la droite

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = t, \\ z = 2 - 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Elle passe par $(1; 0; 2)$ et a pour vecteur directeur $(1; 1; -2)$.

À retenir

Deux paramètres décrivent un plan avec deux directions indépendantes. Une équation $ax + by + cz + d = 0$ possède le vecteur normal $(a; b; c)$. Pour une intersection, traduire la géométrie en un système, puis interpréter l'ensemble des solutions.

6 5. Droite et plan : trouver une intersection

6.1 Substituer les coordonnées de la droite

Pour étudier une droite d et un plan $\mathcal{P}$, on remplace les coordonnées x, y, z de la droite dans l'équation du plan. On obtient une équation portant sur le paramètre de la droite.

- Une unique valeur du paramètre donne un unique point d'intersection.
- Aucune valeur donne une droite parallèle au plan et extérieure à celui-ci.
- Une identité vraie pour tout paramètre signifie que la droite est contenue dans le plan.

Exemple entièrement détaillé

Soit

$$d : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + z - 3 = 0$.

On remplace :

$$\begin{aligned} x - y + z - 3 &= t - (1 + t) + t - 3 \\ &= t - 4. \end{aligned}$$

Le point de la droite est dans le plan lorsque

$$t - 4 = 0 \iff t = 4.$$

En reportant cette valeur dans la droite :

$$I(4; 5; 4).$$

La droite et le plan sont donc sécants en I . Contrôle : $4 - 5 + 4 - 3 = 0$, comme attendu.

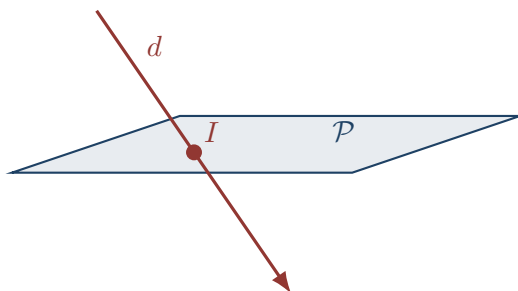


FIGURE 5 – Une droite peut traverser un plan en un point I . La substitution des coordonnées paramétriques dans l'équation du plan permet de calculer la valeur du paramètre correspondant à cette intersection.

6.2 Lire la position à partir des directions

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite et $\vec{n}$ un vecteur normal du plan :

- si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, la droite est parallèle au plan ou contenue dans le plan ; il faut tester un point de la droite pour les distinguer ;

— si $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$, la droite traverse le plan en un unique point.

La substitution dans l'équation du plan reste une méthode fiable pour obtenir le point d'intersection.

6.3 Une méthode générale de rédaction

Lorsqu'un exercice demande une position ou une intersection, suivre cette trame :

1. identifier les points, les vecteurs directeurs et, pour un plan cartésien, le vecteur normal ;
2. écrire la représentation ou l'équation sans sauter les coordonnées ;
3. traduire la question en égalités ou en un système ;
4. résoudre en conservant les paramètres et les unités éventuelles ;
5. revenir à la géométrie : point, droite, parallélisme, intersection ou impossibilité ;
6. contrôler le résultat dans les équations de départ.

À retenir

Un calcul n'est terminé que lorsque son résultat est interprété. Après avoir trouvé un paramètre, le remplacer dans les trois coordonnées et, si possible, dans l'équation du plan.

7 6. Exercices gradués

Les exercices 1 à 3 vérifient les calculs de base. Les exercices 4 à 8 font travailler les représentations et les intersections. L'exercice 9 est une synthèse proche d'une rédaction attendue au bac, mais ce n'est pas un sujet officiel. Les indices sont volontairement courts; les corrections détaillées se trouvent dans le fascicule séparé.

Exercice 1 – Coordonnées et relation de Chasles

On considère les points $A(-2; 1; 3)$, $B(1; -3; 5)$ et $C(4; 0; 2)$.

- Calculer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- Vérifier la relation de Chasles en additionnant $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
- Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AC]$.

Indice.

Pour chaque vecteur, écrire « coordonnées du point d'arrivée moins celles du point de départ ». Pour le milieu, faire trois moyennes.

Exercice 2 – Colinéarité et alignement

On considère $\vec{u} = (2; -1; 3)$, $\vec{v} = (-6; 3; -9)$ et les points $P(1; 2; 0)$, $Q(3; 1; 3)$, $R(-5; 5; -9)$.

- Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- Calculer $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$.
- Les points P, Q, R sont-ils alignés? Justifier.

Indice.

Pour a), cherche λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$. Pour c), compare les deux vecteurs qui partent de P .

Exercice 3 – Distance et orthogonalité

On donne $A(1; -2; 0)$, $B(4; 2; -3)$, $\vec{u} = (2; -1; 2)$ et $\vec{v} = (1; 2; 0)$.

- Calculer $\overrightarrow{AB}$ puis la distance AB .
- Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- Conclure sur l'orthogonalité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Indice.

La distance est la norme de $\overrightarrow{AB}$. Le produit scalaire est une somme de trois produits, avec les signes.

Exercice 4 – Équation paramétrique d'une droite

On considère $A(1; 2; -1)$ et $B(3; -1; 2)$.

- Calculer un vecteur directeur de la droite $d = (AB)$.
- Donner une représentation paramétrique de d .
- Le point $M(5; -4; 5)$ appartient-il à d ?

- d) Le point $N(4; -2; 4)$ appartient-il à d ?

Indice.

Partir de A , puis résoudre la même valeur de paramètre dans les trois coordonnées. Pour N , une valeur qui convient à deux coordonnées peut ne pas convenir à la troisième.

Exercice 5 – Intersection de deux droites

On considère

$$d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{et} \quad d' : \begin{cases} x = 4 - 2s \\ y = -1 + 2s \\ z = 2 \end{cases},$$

où $s, t \in \mathbb{R}$.

- Donner un vecteur directeur de chacune des droites et dire s'ils sont colinéaires ou non.
- Rechercher un point commun en résolvant les égalités de coordonnées.
- Donner la position relative de d et d' .

Indice.

Commencer par la coordonnée z . Une fois t connu, utiliser une autre coordonnée pour trouver s , puis contrôler la dernière.

Exercice 6 – Représentation paramétrique d'un plan

Soit $A(1; 0; 2)$ et soient $\vec{u} = (1; 1; 0)$, $\vec{v} = (0; 1; 1)$. On note $\mathcal{P}$ le plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- Justifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
- Donner une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$.
- Vérifier que $Q(2; 3; 4)$ appartient à $\mathcal{P}$.
- Le point $R(2; 4; 6)$ appartient-il à $\mathcal{P}$?

Indice.

Pour b), écrire $M = A + s\vec{u} + t\vec{v}$. Pour c) et d), les valeurs de s et t viennent notamment des première et troisième coordonnées; la deuxième sert de contrôle.

Exercice 7 – Équation cartésienne d'un plan

Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 2)$ et $C(1; 1; 3)$.

- Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- Chercher un vecteur normal $\vec{n} = (a; b; c)$ en traduisant les deux conditions de perpendicularité.
- Utiliser le point A pour obtenir l'équation du plan.
- Vérifier l'équation avec B et C .

Indice.

Les conditions sont $a + b = 0$ et $b + c = 0$. Choisir une valeur simple pour une inconnue non nulle permet de trouver un vecteur normal.

Exercice 8 – Intersection d'une droite et d'un plan

On donne la droite

$$d : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + z - 3 = 0$.

- Donner un vecteur directeur de d et un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
- Calculer leur produit scalaire et prévoir la position possible de la droite.
- Déterminer l'intersection de d et $\mathcal{P}$ par substitution.
- Contrôler que le point obtenu appartient bien aux deux objets.

Indice.

Remplace x, y, z dans l'équation du plan par les expressions en t . Ne confonds pas le paramètre et les coordonnées du point d'intersection.

Exercice 9 – Intersection de deux plans

On considère

$$\mathcal{P} : x + y + z = 3, \quad \mathcal{P}' : x - y = 1.$$

- Montrer que les plans ne sont pas parallèles en comparant leurs vecteurs normaux.
- Résoudre le système formé par les deux équations en choisissant un paramètre.
- Donner une représentation paramétrique de leur intersection.
- Vérifier que le point obtenu pour une valeur simple du paramètre appartient aux deux plans.

Indice.

La seconde équation donne directement $y = x - 1$. Choisir ensuite une expression simple pour x , par exemple $x = 1 + t$.

Exercice 10 – Synthèse : trajectoire dans un plan

Un point se déplace sur la droite

$$d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 1 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Un écran est modélisé par le plan $\mathcal{E}$ d'équation

$$2x - y + z - 3 = 0.$$

- Donner le point de départ de la trajectoire et un vecteur directeur de d .
- Le point de départ est-il sur l'écran ?
- Déterminer la valeur de t lorsque la trajectoire rencontre l'écran.
- Donner le point d'entrée sur l'écran et rédiger une phrase-réponse.
- Contrôler le résultat dans l'équation de $\mathcal{E}$.

Indice.

Le point de départ correspond à $t = 0$. Dans l'équation du plan, remplace x, y, z par $1 + t, 2, 1 - t$, puis interprète la valeur de t .

8 Bilan, erreurs fréquentes et rappel différé

8.1 La carte mentale du chapitre

Objet	Écriture et idée associée
Vecteur $\overrightarrow{AB}$	arrivée moins départ : $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
Colinéarité	$\vec{v} = \lambda \vec{u}$ avec un même λ partout
Norme	$\ (a; b; c)\ = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
Droite	un point + un paramètre fois un vecteur directeur
Plan paramétrique	un point + deux paramètres fois deux directions non colinéaires
Plan cartésien	$ax + by + cz + d = 0$, avec normal $(a; b; c)$
Intersection	résoudre les équations puis interpréter les solutions

8.2 Erreurs typiques à surveiller

- Écrire départ moins arrivée au lieu d'arrivée moins départ pour un vecteur.
- Utiliser deux facteurs différents pour conclure à la colinéarité.
- Confondre le produit scalaire, qui donne un nombre, avec un produit coordonnée par coordonnée.
- Décrire un plan avec une seule direction, ce qui ne décrit qu'une droite.
- Vérifier seulement deux coordonnées pour l'appartenance à une droite.
- Trouver un paramètre puis oublier de calculer les coordonnées du point.
- Donner une équation sans vérifier au moins les points ou les contraintes qui ont servi à la construire.

8.3 Auto-évaluation

Cocher une phrase après les exercices :

- Je sais calculer $\overrightarrow{AB}$ sans inverser départ et arrivée.
- Je sais expliquer avec mes mots ce qu'est un vecteur directeur.
- Je sais distinguer une représentation paramétrique de droite et de plan.
- Je sais reconnaître un vecteur normal dans une équation de plan.
- Je sais résoudre une intersection et vérifier le résultat.

Si une phrase reste difficile, reprendre uniquement la fiche correspondante et refaire l'exercice associé. Une difficulté localisée indique une notion à consolider, pas un échec de tout le chapitre.

8.4 Rappels différés, sans correction immédiate

Le lendemain. Avec $A(0; 1; -2)$ et $B(3; -1; 4)$, calculer $\overrightarrow{AB}$, sa norme et les coordonnées du milieu de $[AB]$.

Trois jours après. Les vecteurs $\vec{u} = (1; 2; -1)$ et $\vec{v} = (-2; -4; 2)$ sont-ils colinéaires ? Les vecteurs $\vec{w} = (1; 0; 1)$ et $\vec{q} = (1; 1; -1)$ sont-ils orthogonaux ?

Une semaine après. Reprendre la droite passant par $A(2; -1; 0)$ et $B(0; 3; 4)$, puis vérifier si $M(4; -5; -4)$ lui appartient. Expliquer enfin pourquoi l'équation $2x - y + z - 4 = 0$ décrit un plan et donner son vecteur normal.

Les réponses expliquées de ces rappels, du diagnostic et des dix exercices sont dans le fascicule séparé `corrections.pdf`.

8.5 En cas de blocage

Revenir à la question la plus concrète :

1. Quels sont les points et leurs coordonnées ?
2. Quelle direction ou quel objet cherche-t-on ?
3. Quelle égalité traduit cette demande ?
4. Quel calcul simple peut être contrôlé immédiatement ?

Écrire une étape correcte, même incomplète, permet souvent de faire apparaître la suivante. La rédaction et le contrôle font partie de la résolution, pas seulement de la présentation finale.