

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Corrections expliquées

Orthogonalité et distances dans l'espace

Utilisation. Cherche d'abord dans le fascicule du cours. Lis seulement l'indice si tu es bloquée, puis compare ta démarche avec la correction complète. Une réponse différente peut être correcte si elle est justifiée et si elle respecte les données de l'énoncé. Les exercices sont des créations pédagogiques et ne sont pas présentés comme des sujets officiels du baccalauréat.

Table des matières

1	Diagnostic : réponses et rappels ciblés	3
2	Corrections des exercices 1 à 3 : calculs	5
3	Corrections des exercices 4 à 6 : droites et projections	6
4	Corrections des exercices 7 à 10 : raisonnements et synthèse	8
5	Rappel différé : réponses	10

1 Diagnostic : réponses et rappels ciblés

Correction D1

Pour $\vec{u} = (3; -4; 0)$, la norme se calcule en élevant chaque coordonnée au carré :

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\| &= \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{9 + 16 + 0} = \sqrt{25} = 5.\end{aligned}$$

La longueur est positive, donc on retient $\|\vec{u}\| = 5$.

Correction D2

On multiplie les coordonnées correspondantes, puis on additionne :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= 2 \times 1 + 1 \times (-2) + (-1) \times 0 \\ &= 2 - 2 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Les deux vecteurs sont orthogonaux, sous réserve qu'ils soient considérés comme des vecteurs directeurs non nuls.

Correction D3

On utilise « arrivée moins départ » :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (4 - 1; 0 - (-2); -1 - 3) \\ &= (3; 2; -4).\end{aligned}$$

La deuxième coordonnée est positive, car $0 - (-2) = 0 + 2 = 2$.

Correction D4

Pour $M(1; 1; 0)$, on remplace les coordonnées dans l'équation :

$$1 + 2 \times 1 - 0 - 3 = 0.$$

Donc M appartient au plan.

Pour $N(0; 1; 0)$, on obtient

$$0 + 2 \times 1 - 0 - 3 = -1 \neq 0.$$

Donc N n'appartient pas au plan.

Correction D5

$$2t + 3 = 9 \quad \Longleftrightarrow \quad 2t = 6 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 3.$$

On soustrait 3 aux deux membres, puis on divise par 2.

Correction D6

Dire que H est le projeté orthogonal de P sur une droite d signifie deux choses :

1. H appartient à la droite d ;
2. le segment PH est perpendiculaire à la droite d .

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d , la seconde condition s'écrit

$$\overrightarrow{PH} \cdot \vec{u} = 0.$$

Point de méthode

Le diagnostic ne mesure pas une valeur personnelle. Chaque erreur indique un geste précis à reprendre : signe, coordonnées, produit scalaire ou vocabulaire géométrique.

2 Corrections des exercices 1 à 3 : calculs

Correction 1 – Produit scalaire et orthogonalité

a)

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= 2 \times 1 + (-1) \times 2 + 3 \times 0 \\ &= 2 - 2 + 0 = 0.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{w} &= 2 \times 3 + (-1) \times 1 + 3 \times (-2) \\ &= 6 - 1 - 6 = -1.\end{aligned}$$

c) Pour être complet, comparons aussi $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 1 \times 3 + 2 \times 1 + 0 \times (-2) = 5.$$

Seul le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc orthogonaux ; les deux autres couples ne le sont pas.

Correction 2 – Distance et angle droit

a)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (4 - 1 ; 0 - 0 ; 0 - 2) = (3 ; 0 ; -2), \\ \overrightarrow{AC} &= (1 - 1 ; 2 - 0 ; 2 - 2) = (0 ; 2 ; 0).\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}AB &= \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}, \\ AC &= \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2} = 2.\end{aligned}$$

c) Les deux côtés qui se rencontrent en A sont représentés par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Leur produit scalaire vaut

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (3 ; 0 ; -2) \cdot (0 ; 2 ; 0) = 3 \times 0 + 0 \times 2 + (-2) \times 0 = 0.$$

Les deux vecteurs sont orthogonaux. Le triangle ABC est donc rectangle en A .

Correction 3 – Calculer un angle

a)

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 1, \\ \|\vec{u}\| &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}, \\ \|\vec{v}\| &= \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

b) Les vecteurs sont non nuls, donc la formule de l'angle s'applique :

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Dans l'intervalle $[0^\circ; 180^\circ]$, l'angle dont le cosinus vaut $\frac{1}{2}$ est 60° . Ainsi,

$$\boxed{\theta = 60^\circ.}$$

3 Corrections des exercices 4 à 6 : droites et projections

Correction 4 – Droite perpendiculaire à un plan

a) Soit $M(x; y; z)$. On a

$$\overrightarrow{AM} = (x - 1; y; z - 2).$$

La condition $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ donne

$$\begin{aligned} 2(x - 1) - y + (z - 2) &= 0 \\ 2x - y + z - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{P} : 2x - y + z - 4 = 0.}$$

b) Le vecteur directeur de d est $\vec{u} = (2; -1; 1)$. C'est exactement le vecteur normal donné au plan : $\vec{u} = \vec{n}$. La droite est donc perpendiculaire au plan.

c) La droite a pour coordonnées

$$x = 2t, \quad y = 1 - t, \quad z = t.$$

Pour que son point soit dans le plan, on remplace ces coordonnées dans $2x - y + z - 4 = 0$:

$$\begin{aligned} 2(2t) - (1 - t) + t - 4 &= 0 \\ 4t - 1 + t + t - 4 &= 0 \\ 6t - 5 &= 0 \\ t &= \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Le point d'intersection est donc

$$\begin{aligned} I &= \left(2 \times \frac{5}{6}; 1 - \frac{5}{6}; \frac{5}{6} \right) \\ &= \left(\frac{5}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6} \right). \end{aligned}$$

Contrôle dans le plan :

$$2 \times \frac{5}{3} - \frac{1}{6} + \frac{5}{6} - 4 = \frac{10}{3} + \frac{4}{6} - 4 = 0.$$

Correction 5 – Projection sur une droite

a) Partir de A et ajouter $t\vec{u}$ donne

$$d : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = t, \\ z = 0, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) On calcule d'abord

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (0; 5; 2).$$

Alors

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} &= (0; 5; 2) \cdot (2; 1; 0) \\ &= 0 \times 2 + 5 \times 1 + 2 \times 0 = 5, \\ \vec{u} \cdot \vec{u} &= 2^2 + 1^2 + 0^2 = 5. \end{aligned}$$

La formule du projeté donne

$$t_0 = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \frac{5}{5} = 1.$$

c) On remplace $t_0 = 1$ dans la droite :

$$H = (1; 0; 0) + (2; 1; 0) = (3; 1; 0).$$

Le vecteur qui relie P à H est

$$\overrightarrow{PH} = (3 - 1; 1 - 5; 0 - 2) = (2; -4; -2).$$

La distance est donc

$$\begin{aligned} d(P, d) = PH &= \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{4 + 16 + 4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

d)

$$\overrightarrow{PH} \cdot \vec{u} = (2; -4; -2) \cdot (2; 1; 0) = 2 \times 2 + (-4) \times 1 + (-2) \times 0 = 0.$$

Le segment PH est bien orthogonal à la droite. Comme H appartient à d , les deux conditions du projeté sont vérifiées.

Correction 6 – Projection sur un plan

a) Dans l'équation $2x - y + 2z - 4 = 0$, un vecteur normal est

$$\vec{n} = (2; -1; 2).$$

Au point $P(1; 1; 1)$, l'expression vaut

$$\delta = 2 \times 1 - 1 + 2 \times 1 - 4 = -1.$$

b) On calcule

$$\|\vec{n}\|^2 = 2^2 + (-1)^2 + 2^2 = 9.$$

La formule du projeté donne

$$\begin{aligned} H &= P - \frac{\delta}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} \\ &= (1; 1; 1) - \frac{-1}{9} (2; -1; 2) \\ &= (1; 1; 1) + \left(\frac{2}{9}; -\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right) \\ &= \left(\frac{11}{9}; \frac{8}{9}; \frac{11}{9}\right). \end{aligned}$$

c) La distance au plan est

$$d(P, \mathcal{P}) = \frac{|\delta|}{\|\vec{n}\|} = \frac{1}{3}.$$

d) Vérifions l'appartenance de H au plan :

$$2 \times \frac{11}{9} - \frac{8}{9} + 2 \times \frac{11}{9} - 4 = \frac{22 - 8 + 22 - 36}{9} = 0.$$

De plus, $\overrightarrow{PH} = \frac{1}{9}\vec{n}$, donc PH est normal au plan. Le point calculé est bien le projeté orthogonal.

4 Corrections des exercices 7 à 10 : raisonnements et synthèse

Correction 7 – Le point le plus proche

a) Comme H est le projeté orthogonal de M sur le plan, MH est perpendiculaire au plan. Le segment HN est contenu dans le plan. Donc $MH \perp HN$ et le triangle MHN est rectangle en H .

b) Le théorème de Pythagore donne

$$MN^2 = MH^2 + HN^2.$$

c) Comme $HN^2 \geq 0$, on a

$$MN^2 \geq MH^2.$$

Les longueurs étant positives, cela entraîne $MN \geq MH$, c'est-à-dire

$$MH \leq MN.$$

Quel que soit le point N choisi dans le plan, sa distance à M est donc au moins égale à MH . Le point H est le point du plan le plus proche de M . L'égalité n'a lieu que si $HN = 0$, donc si $N = H$.

Correction 8 – Plan médiateur

a)

$$I = \left(\frac{0+4}{2}; \frac{0+2}{2}; \frac{0+0}{2} \right) = (2; 1; 0).$$

b) Le plan médiateur est perpendiculaire à (AB) , donc $\overrightarrow{AB} = (4; 2; 0)$ est un vecteur normal. Comme le plan passe par I , un point $M(x; y; z)$ du plan vérifie

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 &\iff (x-2; y-1; z) \cdot (4; 2; 0) = 0 \\ &\iff 4(x-2) + 2(y-1) = 0 \\ &\iff 2x + y - 5 = 0. \end{aligned}$$

Donc le plan médiateur a pour équation

$$\boxed{2x + y - 5 = 0.}$$

c) Pour $M(2; 1; 3)$, le membre de gauche vaut

$$2 \times 2 + 1 - 5 = 0.$$

Le point M appartient donc au plan médiateur.

d)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} &= A - M = (-2; -1; -3), \\ \overrightarrow{MB} &= B - M = (2; 1; -3). \end{aligned}$$

Les deux longueurs valent

$$\begin{aligned} MA &= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}, \\ MB &= \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}. \end{aligned}$$

On confirme bien que $MA = MB$.

Correction 9 – Synthèse dans un pavé droit

a) Les vecteurs sont

$$\overrightarrow{OA} = (4; 0; 0), \quad \overrightarrow{OC} = (0; 3; 0), \quad \overrightarrow{OE} = (0; 0; 2).$$

Les produits scalaires sont

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= 4 \times 0 + 0 \times 3 + 0 \times 0 = 0, \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OE} &= 4 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 2 = 0, \\ \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OE} &= 0 \times 0 + 3 \times 0 + 0 \times 2 = 0.\end{aligned}$$

Les trois directions sont orthogonales deux à deux.

b)

$$\overrightarrow{OG} = G - O = (4; 3; 2).$$

Donc

$$\begin{aligned}OG &= \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{16 + 9 + 4} = \sqrt{29}.\end{aligned}$$

c) Le plan de base est $z = 0$. Un vecteur normal est $(0; 0; 1)$. Le point de $z = 0$ situé juste sous G est

$$B(4; 3; 0).$$

Ainsi, le projeté orthogonal de G sur la base est B . La distance vaut

$$d(G, \mathcal{B}) = GB = |2 - 0| = 2.$$

d) On utilise $\overrightarrow{OA} = (4; 0; 0)$ et $\overrightarrow{OG} = (4; 3; 2)$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OG} &= 4 \times 4 = 16, \\ \|\overrightarrow{OA}\| &= 4, \\ \|\overrightarrow{OG}\| &= \sqrt{29}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\cos(\widehat{AOG}) = \frac{16}{4\sqrt{29}} = \frac{4}{\sqrt{29}}.$$

Une calculatrice donne environ $42,0^\circ$, si l'on demande une valeur approchée en degrés.

Correction 10 – Complément : plans perpendiculaires

a) On lit les coefficients des variables dans les équations :

$$\vec{n} = (1; 1; 1) \text{ est normal à } \mathcal{P}, \quad \vec{n}' = (1; -1; 0) \text{ est normal à } \mathcal{Q}.$$

b)

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 0 = 0.$$

c) Les vecteurs normaux sont orthogonaux. D'après le critère du cours, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont perpendiculaires. Ce résultat est le complément lié au programme publié en 2026, applicable en terminale à partir de 2027–2028.

5 Rappel différé : réponses

Correction R1

Dans une base orthonormée, si $\vec{u} = (a; b; c)$ et $\vec{v} = (a'; b'; c')$, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb' + cc'.$$

On multiplie les coordonnées correspondantes, puis on additionne.

Correction R2

Pour deux vecteurs non nuls :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Correction R3

L'expression $ax_P + by_P + cz_P + d$ peut être positive ou négative selon le côté du plan où se trouve P . Une distance est toujours positive ou nulle, donc on utilise sa valeur absolue :

$$d(P, \mathcal{P}) = \frac{|ax_P + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Correction R4

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite d , le projeté H de P sur d vérifie :

1. $H \in d$;
2. $\overrightarrow{PH} \cdot \vec{u} = 0$, donc $PH \perp d$.

Ces deux conditions permettent de trouver puis de contrôler le projeté.

Point de méthode

Quand une correction paraît longue, repérer les trois étapes : traduire la situation, calculer avec les coordonnées, puis interpréter et contrôler le résultat. Savoir où une démarche bifurque est plus utile que recopier une réponse.