

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Orthogonalité et distances dans l'espace

Mesurer, comparer et démontrer des relations géométriques

Un cours progressif avec exercices et indices

Objectifs

- Calculer et interpréter un produit scalaire dans un repère orthonormé.
- Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, calculer une longueur ou un angle.
- Reconnaître un vecteur normal et caractériser l'orthogonalité d'une droite et d'un plan.
- Déterminer un projeté orthogonal et une distance à une droite ou à un plan.

Cadre du cours. Le thème « Orthogonalité et distances dans l'espace » fait partie du programme de spécialité de terminale générale. Le cœur étudié ici correspond au programme publié au Bulletin officiel spécial n° 8 du 25 juillet 2019, encore en vigueur pour une terminale en 2026–2027. Il est également repris dans le programme publié au Bulletin officiel n° 14 du 2 avril 2026, dont l'application en terminale est prévue à la rentrée 2027–2028. Les exercices de ce fascicule sont créés pour l'apprentissage et ne sont pas des sujets officiels.

Organisation conseillée. Prévoir cinq séances de 35 à 45 minutes, avec une pause courte si nécessaire :

1. diagnostic, produit scalaire et norme ;
2. orthogonalité des vecteurs, des droites et d'une droite avec un plan ;
3. projections et distance à une droite ;
4. projection et distance à un plan, puis plan médiateur ;
5. exercice de synthèse, rédaction et rappel différé.

Les exercices sont dans ce fascicule avec leurs indices. Les corrections détaillées se trouvent dans le fascicule séparé **corrections.pdf**. Essaie d'abord la question, consulte son indice si nécessaire, puis seulement la correction.

Table des matières

1	Avant de commencer : diagnostic et rappels	3
2	1. Produit scalaire, orthogonalité et longueurs	4
3	2. Orthogonalité dans les configurations de l'espace	7
4	3. Projections et distance à une droite	9
5	4. Projection et distance à un plan	11
6	5. Lieux géométriques et configuration d'un pavé droit	13
7	6. Exercices gradués	15
8	Bilan : savoir quoi faire en cas de blocage	19

1 Avant de commencer : diagnostic et rappels

Durée indicative : 12 minutes, sans note et sans calculatrice. Ce diagnostic sert à repérer les prérequis utiles, pas à attribuer une note. Si une question bloque, écrire simplement « à revoir » et continuer. Les réponses sont dans le fascicule séparé des corrections.

- D1.** Dans un repère orthonormé de l'espace, calculer la norme du vecteur $\vec{u} = (3; -4; 0)$.
- D2.** Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pour $\vec{u} = (2; 1; -1)$ et $\vec{v} = (1; -2; 0)$.
- D3.** Avec $A(1; -2; 3)$ et $B(4; 0; -1)$, calculer $\overrightarrow{AB}$.
- D4.** Le point $M(1; 1; 0)$ appartient-il au plan d'équation $x + 2y - z - 3 = 0$? Et le point $N(0; 1; 0)$?
- D5.** Résoudre l'équation $2t + 3 = 9$.
- D6.** Dans une figure, que signifie « H est le projeté orthogonal de P sur une droite »? Répondre avec une phrase et une relation d'orthogonalité.

1.1 Les prérequis indispensables

Le repère orthonormé. Un repère de l'espace possède trois axes. Il est orthonormé lorsque les axes sont perpendiculaires deux à deux et que l'unité de longueur est la même sur les trois axes. Dans ce repère, les coordonnées permettent de calculer des longueurs avec le théorème de Pythagore.

Coordonnées d'un vecteur. Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$, alors

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$$

On retient la phrase « arrivée moins départ ». Par exemple,

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 1; 0 - (-2); -1 - 3) = (3; 2; -4).$$

Carrés et racines carrées. Pour un vecteur $\vec{u} = (a; b; c)$, les nombres a^2 , b^2 et c^2 sont toujours positifs ou nuls. Une longueur s'écrit avec une racine carrée positive : $\sqrt{25} = 5$, et non -5 .

Équation d'un plan. Pour vérifier si $M(x_M; y_M; z_M)$ appartient au plan $ax + by + cz + d = 0$, on remplace x , y et z par les coordonnées de M . Si l'égalité est vraie, le point appartient au plan.

Équation simple. On transforme une équation en conservant l'égalité :

$$2t + 3 = 9 \quad \Longleftrightarrow \quad 2t = 6 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 3.$$

À retenir

Avant de chercher une orthogonalité ou une distance, vérifier trois choses : le repère est-il orthonormé? Les coordonnées ont-elles été calculées dans le bon ordre? Les nombres et les unités sont-ils cohérents?

2 1. Produit scalaire, orthogonalité et longueurs

2.1 L'idée essentielle : comparer deux directions

Dans le plan comme dans l'espace, deux directions peuvent être perpendiculaires, proches, ou orientées en sens opposés. Le produit scalaire transforme cette comparaison en un nombre :

- un produit scalaire nul indique une orthogonalité ;
- un produit scalaire positif indique que les directions vont globalement dans le même sens ;
- un produit scalaire négatif indique qu'elles vont globalement en sens opposés.

Le produit scalaire ne donne pas une nouvelle direction : il donne un nombre réel. Cette différence est importante.

2.2 Calcul dans un repère orthonormé

Soient $\vec{u} = (a; b; c)$ et $\vec{v} = (a'; b'; c')$ deux vecteurs de l'espace. Dans une base orthonormée, leur produit scalaire est défini par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb' + cc'.$$

On multiplie les coordonnées qui occupent la même place, puis on additionne les trois résultats.

Le produit scalaire est **symétrique** et **bilinéaire** :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{v} \cdot \vec{u}, \\ (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}, \\ (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} &= \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}),\end{aligned}$$

où λ est un nombre réel.

Exemple entièrement détaillé

On considère $\vec{u} = (2; -1; 2)$ et $\vec{v} = (1; 2; 0)$. Pour calculer le produit scalaire, on associe chaque coordonnée à celle qui lui correspond :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= 2 \times 1 + (-1) \times 2 + 2 \times 0 \\ &= 2 - 2 + 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Le produit scalaire est nul. Les deux vecteurs non nuls sont donc orthogonaux :

$$\vec{u} \perp \vec{v}.$$

L'annulation vient des signes ; il ne faut pas remplacer le produit scalaire par une somme des coordonnées.

2.3 Orthogonalité de deux vecteurs

Deux vecteurs non nuls sont **orthogonaux** lorsque leurs directions sont perpendiculaires. Dans un repère orthonormé :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Le vecteur nul a un produit scalaire nul avec tous les vecteurs, mais il n'a pas de direction. Lorsque l'on parle d'une droite ou d'un angle, les vecteurs utilisés comme directions doivent donc être non nuls.

2.4 Norme et distance

La **norme** d'un vecteur est sa longueur. Elle se déduit du produit scalaire :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

Si $\vec{u} = (a; b; c)$, alors

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

La distance entre deux points est la norme du vecteur qui les relie :

$$\boxed{AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Exemple entièrement détaillé

On considère $A(1; -2; 0)$ et $B(4; 2; -3)$. D'abord, on calcule le vecteur qui va de A vers B :

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 1; 2 - (-2); -3 - 0) = (3; 4; -3).$$

La distance est la norme de ce vecteur :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{3^2 + 4^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{9 + 16 + 9} \\ &= \sqrt{34}. \end{aligned}$$

La longueur est positive, comme toute distance. Une valeur approchée est $AB \approx 5,83$ unités si l'on utilise une calculatrice à la fin.

2.5 Angle entre deux vecteurs

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, et si θ est l'angle compris entre leurs directions, alors

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)}.$$

Donc

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

Cette formule est valable seulement lorsque les deux vecteurs sont non nuls. Pour obtenir une mesure en degrés avec la calculatrice, vérifier que le mode **degrés** est sélectionné.

Exemple entièrement détaillé

Soient $\vec{u} = (1; 1; 0)$ et $\vec{v} = (1; 0; 1)$. On commence par le produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 1.$$

Les normes valent

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Comme θ est compris entre 0° et 180° , on obtient $\theta = 60^\circ$.

2.6 Développer une norme au carré

Le produit scalaire permet de développer une longueur au carré :

$$\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.\end{aligned}$$

De même,

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$

En isolant le produit scalaire, on obtient une formule de polarisation :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2}{2}.$$

Ces formules sont surtout utiles lorsqu'un énoncé donne des longueurs plutôt que des coordonnées.

À retenir

Produit scalaire : une somme de trois produits. Orthogonalité : le produit scalaire vaut zéro.
Norme : $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$. Distance entre deux points : norme du vecteur « arrivée moins départ ».

3 2. Orthogonalité dans les configurations de l'espace

3.1 Deux droites

Un vecteur non nul dont la direction est celle d'une droite est un **vecteur directeur** de cette droite. Pour étudier l'orthogonalité de deux droites, on choisit un vecteur directeur pour chacune et on calcule leur produit scalaire.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs non nuls de deux droites d et d' , alors leurs directions sont orthogonales si

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Si les deux droites se coupent, on peut alors dire qu'elles sont **perpendiculaires**. Dans l'espace, deux droites peuvent avoir des directions orthogonales sans se couper : il faut donc distinguer la direction et la position des droites.

Méthode

Pour montrer que deux droites sont perpendiculaires :

1. trouver un vecteur directeur non nul de chaque droite ;
2. calculer leur produit scalaire ;
3. vérifier que les droites ont un point commun si l'énoncé demande des droites perpendiculaires, et rédiger la conclusion.

3.2 Vecteur normal et plan

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est **normal** à un plan $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal à toutes les directions de ce plan. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux directions non colinéaires de $\mathcal{P}$, il suffit de vérifier

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{n} \cdot \vec{v} = 0.$$

Une équation cartésienne du plan de vecteur normal $\vec{n} = (a; b; c)$ et passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ est

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

En effet, un point $M(x; y; z)$ appartient au plan si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal au vecteur normal :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$

Exemple entièrement détaillé

On cherche une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(1; 0; 2)$ et normal au vecteur $\vec{n} = (2; -1; 1)$. Soit $M(x; y; z)$ un point quelconque.

On calcule

$$\overrightarrow{AM} = (x - 1; y; z - 2).$$

La condition d'appartenance est l'orthogonalité avec $\vec{n}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 &\iff 2(x - 1) - y + (z - 2) = 0 \\ &\iff 2x - y + z - 4 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathcal{P} : 2x - y + z - 4 = 0.$$

Le point A vérifie bien l'équation : $2 \times 1 - 0 + 2 - 4 = 0$. Le vecteur $(2; -1; 1)$ est bien un vecteur normal.

3.3 Une droite perpendiculaire à un plan

Une droite est perpendiculaire à un plan lorsque son vecteur directeur est colinéaire à un vecteur normal du plan. Si $\vec{u}$ dirige la droite et $\vec{n}$ est normal au plan, on cherche donc un nombre réel non nul λ tel que

$$\vec{u} = \lambda \vec{n}.$$

Il ne suffit pas de montrer qu'une droite est orthogonale à une seule droite du plan : elle doit être orthogonale à toutes les directions du plan.

Exemple entièrement détaillé

Dans le plan $\mathcal{P}$ de l'exemple précédent, un vecteur normal est $\vec{n} = (2; -1; 1)$. La droite d dirigée par $\vec{u} = (-4; 2; -2)$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$, car

$$\vec{u} = -2\vec{n}.$$

La direction de d est donc la direction normale au plan.

3.4 Complément : deux plans perpendiculaires

Repère de programme. Le programme publié au Bulletin officiel du 2 avril 2026 mentionne explicitement les plans perpendiculaires ; cette disposition s'applique à la terminale à partir de la rentrée 2027–2028. Pour deux plans sécants de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$, on a

$$\mathcal{P} \perp \mathcal{P}' \iff \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0.$$

Ce complément peut être laissé de côté si l'on prépare uniquement la session correspondant au programme précédent.

Exemple entièrement détaillé

Les plans de vecteurs normaux $\vec{n} = (1; 1; 1)$ et $\vec{n}' = (1; -1; 0)$ sont perpendiculaires, car

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 0 = 0.$$

À retenir

Pour une droite et un plan, chercher un vecteur directeur de la droite et un vecteur normal du plan. Pour construire un plan, partir d'un point et d'une condition d'orthogonalité avec son vecteur normal.

4 3. Projections et distance à une droite

4.1 Qu'est-ce qu'un projeté orthogonal ?

Soit P un point et d une droite. Le **projeté orthogonal** de P sur d est le point H de d tel que la droite (PH) soit perpendiculaire à d . Le point H est aussi appelé le pied de la perpendiculaire.

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d , la condition se traduit par

$$H \in d \quad \text{et} \quad \overrightarrow{PH} \cdot \vec{u} = 0.$$

4.2 Pourquoi la projection donne la plus courte distance ?

Soit H le projeté orthogonal de P sur une droite d . Pour tout autre point N de d , le triangle PHN est rectangle en H . Le théorème de Pythagore donne

$$PN^2 = PH^2 + HN^2.$$

Comme $HN^2 \geq 0$, on a $PN^2 \geq PH^2$, donc $PN \geq PH$. La distance PH est donc la plus petite distance entre P et un point de la droite. L'égalité n'est possible que lorsque $N = H$.

4.3 Calculer le projeté sur une droite

Une droite passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et dirigée par le vecteur non nul $\vec{u}$ s'écrit

$$M(t) = A + t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pour projeter P sur cette droite, on écrit $H = A + t_0\vec{u}$, puis on impose $\overrightarrow{PH} \perp \vec{u}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PH} \cdot \vec{u} = 0 &\iff (A - P + t_0\vec{u}) \cdot \vec{u} = 0 \\ &\iff (A - P) \cdot \vec{u} + t_0(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 0. \end{aligned}$$

Comme $\vec{u} \neq \vec{0}$, on a $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$, donc

$$t_0 = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

Il suffit ensuite de calculer $H = A + t_0\vec{u}$, puis

$$d(P, d) = PH = \|\overrightarrow{PH}\|.$$

Exemple entièrement détaillé

On considère la droite

$$d : M = A + t\vec{u}, \quad A(1; 0; 0), \quad \vec{u} = (2; 1; 0),$$

et le point $P(1; 5; 2)$. Cherchons son projeté H sur d .

On commence par calculer les deux produits nécessaires :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} &= (0; 5; 2) \cdot (2; 1; 0) \\ &= 0 \times 2 + 5 \times 1 + 2 \times 0 = 5, \\ \vec{u} \cdot \vec{u} &= 2^2 + 1^2 + 0^2 = 5. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$t_0 = \frac{5}{5} = 1.$$

Le projeté est

$$H = A + \vec{u} = (1; 0; 0) + (2; 1; 0) = (3; 1; 0).$$

Contrôlons l'orthogonalité :

$$\overrightarrow{PH} = (3 - 1; 1 - 5; 0 - 2) = (2; -4; -2),$$

et

$$\overrightarrow{PH} \cdot \vec{u} = 2 \times 2 + (-4) \times 1 + (-2) \times 0 = 0.$$

Le calcul est cohérent. Enfin,

$$\begin{aligned} d(P, d) = PH &= \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{24} = 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

À retenir

Projection sur une droite : le point cherché doit d'abord être sur la droite, puis le vecteur qui relie le point donné à ce point doit être orthogonal au vecteur directeur. Le contrôle du produit scalaire est un bon réflexe.

5 4. Projection et distance à un plan

5.1 Le projeté orthogonal sur un plan

Soit P un point et $\mathcal{P}$ un plan. Le projeté orthogonal de P sur $\mathcal{P}$ est l'unique point H du plan tel que $\overrightarrow{PH}$ soit normal au plan.

Si $\vec{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, les deux conditions à écrire sont donc

$$H \in \mathcal{P} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{PH} \text{ est colinéaire à } \vec{n}.$$

Comme pour une droite, ce projeté donne la plus courte distance. Pour tout point N du plan, le triangle PHN est rectangle en H , donc

$$PN^2 = PH^2 + HN^2 \geq PH^2.$$

Ainsi PH est la distance du point au plan.

5.2 Formule avec une équation cartésienne

Soit le plan

$$\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0, \quad (a; b; c) \neq (0; 0; 0),$$

et le point $P(x_P; y_P; z_P)$. Le vecteur $\vec{n} = (a; b; c)$ est normal au plan. Posons

$$\delta = ax_P + by_P + cz_P + d.$$

Le nombre δ mesure de quel côté de l'équation le point se trouve, mais ce n'est pas encore une distance.

Le projeté et la distance sont donnés par

$$H = P - \frac{\delta}{a^2 + b^2 + c^2} (a; b; c)$$

et

$$d(P, \mathcal{P}) = \frac{|\delta|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

D'où vient la formule ? Le segment PH est porté par le vecteur normal, donc on pose $H = P - \lambda(a; b; c)$. Pour que H soit dans le plan, on remplace ses coordonnées dans l'équation :

$$\begin{aligned} a(x_P - \lambda a) + b(y_P - \lambda b) + c(z_P - \lambda c) + d &= 0 \\ \delta - \lambda(a^2 + b^2 + c^2) &= 0. \end{aligned}$$

On obtient $\lambda = \frac{\delta}{a^2 + b^2 + c^2}$, ce qui donne la formule de H . La longueur de PH est alors $|\lambda| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, d'où la formule de distance.

Exemple entièrement détaillé

On considère le plan

$$\mathcal{P} : x + 2y + 2z - 6 = 0$$

et le point $P(2; 1; 2)$. Un vecteur normal est $\vec{n} = (1; 2; 2)$. On calcule d'abord

$$\delta = 1 \times 2 + 2 \times 1 + 2 \times 2 - 6 = 2.$$

Le carré de la norme du vecteur normal vaut

$$\|\vec{n}\|^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 = 9.$$

Le projeté est donc

$$\begin{aligned} H &= (2; 1; 2) - \frac{2}{9}(1; 2; 2) \\ &= \left(2 - \frac{2}{9}; 1 - \frac{4}{9}; 2 - \frac{4}{9}\right) \\ &= \left(\frac{16}{9}; \frac{5}{9}; \frac{14}{9}\right). \end{aligned}$$

Vérifions que H est dans le plan :

$$\frac{16}{9} + 2 \times \frac{5}{9} + 2 \times \frac{14}{9} - 6 = \frac{16 + 10 + 28 - 54}{9} = 0.$$

De plus,

$$\overrightarrow{PH} = H - P = -\frac{2}{9}(1; 2; 2),$$

qui est bien colinéaire au vecteur normal. Enfin,

$$d(P, \mathcal{P}) = \frac{|2|}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}.$$

5.3 Quelle méthode choisir ?

Question	Réflexe utile
Deux vecteurs sont-ils orthogonaux ?	Calculer leur produit scalaire et vérifier qu'il vaut zéro.
Une droite est-elle perpendiculaire à un plan ?	Comparer un vecteur directeur de la droite à un vecteur normal du plan.
Quel est le projeté sur une droite ?	Écrire le point sur la droite et imposer un produit scalaire nul.
Quelle est la distance à un plan donné par une équation ?	Utiliser la formule avec la valeur absolue et la norme du vecteur normal.

À retenir

Pour une distance à un plan, le numérateur est la valeur absolue de l'équation calculée au point. Le dénominateur est la norme du vecteur normal. Ne pas oublier la valeur absolue : une distance ne peut pas être négative.

6 5. Lieux géométriques et configuration d'un pavé droit

6.1 Le plan médiateur de deux points

Soient deux points distincts A et B . L'ensemble des points M tels que $MA = MB$ est le **plan médiateur** du segment $[AB]$. Ce plan :

- passe par le milieu de $[AB]$;
- est perpendiculaire à la droite (AB) ;
- a donc pour vecteur normal un vecteur directeur de (AB) .

Pour trouver son équation, on peut calculer le milieu puis utiliser la forme « plan passant par un point et normal à un vecteur ».

Exemple entièrement détaillé

On cherche le plan médiateur de $A(0; 0; 0)$ et $B(4; 2; 0)$.

Le milieu est

$$I = \left(\frac{0+4}{2}; \frac{0+2}{2}; \frac{0+0}{2} \right) = (2; 1; 0).$$

Un vecteur normal au plan médiateur est

$$\overrightarrow{AB} = (4; 2; 0).$$

Pour un point $M(x; y; z)$, l'équation est

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 &\iff (x-2; y-1; z) \cdot (4; 2; 0) = 0 \\ &\iff 4(x-2) + 2(y-1) = 0 \\ &\iff 2x + y - 5 = 0. \end{aligned}$$

Le plan médiateur est donc

$$\boxed{2x + y - 5 = 0.}$$

Le point A donne -5 dans le membre de gauche et le point B donne 5 . Les valeurs sont opposées, ce qui correspond au fait que A et B sont à la même distance du plan, de part et d'autre de celui-ci.

6.2 Lire un pavé droit avec des coordonnées

Considérons un pavé droit dont les sommets sont

$$O(0; 0; 0), \quad A(4; 0; 0), \quad B(4; 3; 0), \quad C(0; 3; 0), \\ E(0; 0; 2), \quad F(4; 0; 2), \quad G(4; 3; 2), \quad H(0; 3; 2).$$

Les trois arêtes issues de O ont pour vecteurs

$$\overrightarrow{OA} = (4; 0; 0), \quad \overrightarrow{OC} = (0; 3; 0), \quad \overrightarrow{OE} = (0; 0; 2).$$

Leurs produits scalaires sont nuls deux à deux. Les trois directions sont donc orthogonales, ce qui traduit les trois angles droits du pavé.

La diagonale de l'espace est $\overrightarrow{OG} = (4; 3; 2)$. Sa longueur vaut

$$\begin{aligned} OG &= \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{16 + 9 + 4} = \sqrt{29}. \end{aligned}$$

Le plan de la base $(OABC)$ a pour équation $z = 0$ et pour vecteur normal $(0; 0; 1)$. Le projeté de G sur cette base est $B(4; 3; 0)$, et la distance de G à la base est $GB = 2$. Les coordonnées donnent ici une traduction directe de la figure.

À retenir

Dans un solide, les coordonnées ne remplacent pas la géométrie : elles la rendent calculable. Une arête, une diagonale ou une normale correspond à un vecteur ; un angle droit se traduit par un produit scalaire nul.

7 6. Exercices gradués

Les exercices 1 à 3 travaillent les calculs fondamentaux. Les exercices 4 à 6 font passer des coordonnées à une configuration géométrique. Les exercices 7 à 9 entraînent la rédaction et le choix d'une méthode. L'exercice 10 est le complément sur les plans perpendiculaires. Les exercices sont des créations pédagogiques et ne sont pas présentés comme des sujets officiels.

Exercice 1 – Produit scalaire et orthogonalité

On donne

$$\vec{u} = (2; -1; 3), \quad \vec{v} = (1; 2; 0), \quad \vec{w} = (3; 1; -2).$$

- a) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- b) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{w}$.
- c) Quels vecteurs sont orthogonaux ? Justifier avec une phrase.

Indice.

Écris les trois produits coordonnée par coordonnée. Pour conclure, seul un produit scalaire égal à zéro permet d'affirmer l'orthogonalité.

Exercice 2 – Distance et angle droit

On considère

$$A(1; 0; 2), \quad B(4; 0; 0), \quad C(1; 2; 2).$$

- a) Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- b) Calculer les longueurs AB et AC .
- c) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A .

Indice.

Calcule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Il est inutile de calculer tous les angles : un produit scalaire nul suffit.

Exercice 3 – Calculer un angle

Soient $\vec{u} = (1; 1; 0)$ et $\vec{v} = (1; 0; 1)$. On note θ l'angle compris entre ces deux vecteurs.

- a) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
- b) Déterminer $\cos(\theta)$, puis la mesure de θ .

Indice.

Utilise $\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$. La calculatrice doit être en mode degrés pour lire l'angle.

Exercice 4 – Droite perpendiculaire à un plan

On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par $A(1; 0; 2)$ et normal au vecteur $\vec{n} = (2; -1; 1)$. On considère également la droite

$$d: M = (0; 1; 0) + t(2; -1; 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- a) Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
- b) Justifier que d est perpendiculaire à $\mathcal{P}$.
- c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de d et $\mathcal{P}$.

Indice.

Pour a), écrire $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Pour c), remplacer les coordonnées paramétriques de d dans l'équation du plan.

Exercice 5 – Projection sur une droite

On considère la droite d passant par $A(1; 0; 0)$ et dirigée par $\vec{u} = (2; 1; 0)$, ainsi que le point $P(1; 5; 2)$.

- Écrire la représentation paramétrique de d .
- Calculer le paramètre t_0 du projeté $H = A + t_0\vec{u}$ de P sur d .
- Donner les coordonnées de H et calculer la distance de P à d .
- Vérifier que $\overrightarrow{PH} \cdot \vec{u} = 0$.

Indice.

Utilise $t_0 = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}$. Puis remplace ce paramètre dans $A + t\vec{u}$.

Exercice 6 – Projection sur un plan

On considère le plan

$$\mathcal{P} : 2x - y + 2z - 4 = 0$$

et le point $P(1; 1; 1)$.

- Donner un vecteur normal à $\mathcal{P}$, puis calculer la valeur de l'expression $2x - y + 2z - 4$ au point P .
- Déterminer le projeté orthogonal H de P sur $\mathcal{P}$.
- Calculer la distance $d(P, \mathcal{P})$.
- Vérifier que H appartient au plan.

Indice.

Le vecteur normal est $(2; -1; 2)$. La formule est $H = P - \frac{\delta}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}$, où δ est la valeur de l'équation au point P .

Exercice 7 – Le point le plus proche

Soit M un point qui n'appartient pas à un plan $\mathcal{P}$, et soit H son projeté orthogonal sur $\mathcal{P}$. Soit N un autre point quelconque de $\mathcal{P}$.

- Quelle est la nature du triangle MHN ?
- Écrire une égalité entre MN^2 , MH^2 et HN^2 .
- En déduire que $MH \leq MN$, puis expliquer en français pourquoi H est le point du plan le plus proche de M .

Indice.

Le segment MH est perpendiculaire au plan : il est donc perpendiculaire à HN , qui est contenu dans le plan. Utilise ensuite Pythagore.

Exercice 8 – Plan médiateur

On considère $A(0; 0; 0)$ et $B(4; 2; 0)$.

- a) Déterminer le milieu I de $[AB]$.
- b) Déterminer une équation du plan médiateur de $[AB]$.
- c) Vérifier que $M(2; 1; 3)$ appartient à ce plan.
- d) Calculer MA et MB pour confirmer l'interprétation géométrique.

Indice.

Le plan médiateur passe par I et est normal à $\overrightarrow{AB}$. Pour d), calcule les deux normes de $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$.

Exercice 9 – Synthèse dans un pavé droit

On utilise le pavé droit défini dans le cours :

$$O(0; 0; 0), \quad A(4; 0; 0), \quad C(0; 3; 0), \quad E(0; 0; 2), \quad G(4; 3; 2).$$

- a) Calculer les produits scalaires deux à deux des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OE}$.
- b) Calculer la longueur de la diagonale OG .
- c) Déterminer le projeté orthogonal de G sur le plan de base $\mathcal{B} : z = 0$, puis la distance de G à $\mathcal{B}$.
- d) Calculer $\cos(\widehat{AOG})$.

Indice.

Les trois vecteurs des arêtes partent de O . La base $z = 0$ a pour vecteur normal $(0; 0; 1)$.
Pour l'angle, utilise les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OG}$.

Exercice 10 – Complément : plans perpendiculaires

On considère les plans

$$\mathcal{P} : x + y + z = 1, \quad \mathcal{Q} : x - y = 0.$$

Ce complément correspond au programme publié en 2026, applicable en terminale à partir de 2027–2028.

- a) Donner un vecteur normal à chacun des plans.
- b) Calculer le produit scalaire de ces deux vecteurs.
- c) Conclure sur la perpendicularité des plans.

Indice.

Dans une équation $ax + by + cz + d = 0$, le vecteur $(a; b; c)$ est normal.

7.1 Rappel différé

À refaire quelques jours plus tard, sans relire immédiatement le cours :

R1. Comment calcule-t-on le produit scalaire de $(a; b; c)$ et $(a'; b'; c')$?

R2. Quelle égalité permet de reconnaître deux vecteurs orthogonaux ?

R3. Dans la formule de distance à un plan $ax + by + cz + d = 0$, pourquoi y a-t-il une valeur absolue ?

- R4.** Quelles sont les deux conditions qui caractérisent le projeté orthogonal d'un point sur une droite ?

8 Bilan : savoir quoi faire en cas de blocage

8.1 Les erreurs fréquentes

- Écrire $aa' + bb' + cc'$ sans vérifier que les coordonnées appartiennent bien aux deux vecteurs dans le même ordre.
- Confondre produit scalaire, qui donne un nombre, et produit par un scalaire, qui donne un vecteur.
- Oublier les signes, notamment dans $(-1) \times (-2)$ ou dans $x_B - x_A$.
- Dire qu'une droite est perpendiculaire à un plan parce qu'elle est perpendiculaire à une seule droite du plan.
- Utiliser une équation de plan sans identifier son vecteur normal.
- Donner une distance négative ou oublier la valeur absolue dans la formule d'un point à un plan.
- Trouver un point sur la droite ou le plan mais ne pas vérifier la seconde condition d'orthogonalité.

8.2 Auto-évaluation

Cocher une phrase après le travail :

- ☐ Je sais calculer un produit scalaire sans mélanger les coordonnées.
- ☐ Je sais expliquer pourquoi un produit scalaire nul donne une orthogonalité.
- ☐ Je sais distinguer un vecteur directeur d'un vecteur normal.
- ☐ Je sais calculer une distance entre deux points.
- ☐ Je sais trouver un projeté sur une droite ou sur un plan.
- ☐ Je sais contrôler mon résultat dans l'équation ou le produit scalaire de départ.

Si une case reste vide, reprendre seulement la section correspondante, puis refaire l'exercice associé. Une erreur de calcul se corrige en reprenant les signes et les opérations ; une erreur de méthode demande de relire la question « que cherche-t-on ? » ; une incompréhension de la notion demande de revenir à l'idée géométrique et à l'exemple avant de recommencer.

8.3 Sources du cadre de programme

Le cadre institutionnel consulté est le programme de spécialité de terminale générale publié au Bulletin officiel spécial n° 8 du 25 juillet 2019, ainsi que sa version rénovée publiée au Bulletin officiel n° 14 du 2 avril 2026. Les dates d'application sont précisées dans ces textes. Les exercices et les exemples de ce fascicule ont été rédigés pour accompagner l'apprentissage ; ils ne sont pas attribués à une session du baccalauréat.