

Fiche d'histoire mathématique

De Pythagore aux projections

Mesurer un angle droit, puis trouver le chemin le plus court

Idée directrice. L'orthogonalité n'est pas seulement le dessin de deux droites qui se coupent à angle droit. Elle relie longueur, angle, projection et erreur minimale. Son histoire passe de la géométrie des figures au calcul des coordonnées et aux problèmes de mesure.

Table des matières

1	Les triangles rectangles et la mesure	1
2	De la géométrie au produit scalaire	1
3	La projection : mesurer l'écart plutôt que le chemin	1
4	Plans, normales et espaces de dimension supérieure	2
5	Ce que l'histoire éclaire dans le cours	2
6	Pour aller plus loin	2

1 Les triangles rectangles et la mesure

Des tables de longueurs et de triangles rectangles apparaissent très tôt dans les mathématiques babyloniennes. Dans la tradition grecque, le théorème de Pythagore donne une relation entre les trois côtés d'un triangle rectangle :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

Dans les *Éléments*, Euclide présente une démonstration géométrique de ce résultat. La relation permet de transformer une question d'angle droit en une question de longueurs, ce qui annonce le produit scalaire moderne.

2 De la géométrie au produit scalaire

Avec les coordonnées, deux vecteurs $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ peuvent être comparés par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

La formule est une écriture compacte de la géométrie euclidienne. Elle contient à la fois la longueur, car $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, et l'angle, car

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta).$$

Le produit scalaire moderne s'est diffusé avec l'analyse vectorielle à la fin du XIX^e siècle. Il a permis d'écrire avec les mêmes outils des problèmes de géométrie, de mécanique et d'électricité.

3 La projection : mesurer l'écart plutôt que le chemin

Lorsqu'un point n'est pas sur une droite, on cherche souvent le point de cette droite qui en est le plus proche. Le pied de la perpendiculaire est le projeté orthogonal. Dans un triangle rectangle, Pythagore montre immédiatement que tout autre point de la droite donne une distance plus grande.

Cette idée prend une importance nouvelle quand les observations sont imparfaites. En astronomie et en géodésie, plusieurs mesures ne sont pas exactement compatibles avec un même modèle. À la fin du XVIII^e siècle et au début du XIX^e, Gauss et Legendre développent la méthode des moindres carrés : on choisit les paramètres qui rendent minimale la somme des carrés des écarts. Géométriquement, c'est une projection orthogonale sur l'ensemble des modèles possibles.

4 Plans, normales et espaces de dimension supérieure

Un vecteur normal encode une direction perpendiculaire à un plan. Cette idée permet de décrire un plan par une équation et de calculer la distance d'un point à ce plan. Elle se généralise à des espaces où l'on ne peut plus dessiner : un ensemble de données peut être projeté sur une droite ou un plan pour être représenté en deux dimensions.

Repère	Question associée
Antiquité	Comment reconnaître et mesurer un triangle rectangle ?
XVII ^e siècle	Comment traduire une figure par des coordonnées ?
XIX ^e siècle	Comment calculer avec des directions et des produits scalaires ?
Depuis le XIX ^e siècle	Comment ajuster un modèle à des mesures imparfaites ?

5 Ce que l'histoire éclaire dans le cours

- Le produit scalaire est un outil de mesure : il transforme un angle en calcul.
- Une projection orthogonale cherche le point le plus proche, pas un point quelconque qui appartient à la droite ou au plan.
- Une équation cartésienne de plan utilise un vecteur normal pour filtrer les points autorisés.
- Les mêmes idées servent à démontrer un théorème, à mesurer une distance et à ajuster des données.

À retenir. La perpendicularité est devenue calculable lorsque la géométrie a été reliée aux nombres. Le produit scalaire et la projection sont les deux faces d'une même question : comment comparer une direction et isoler la composante qui nous intéresse ?

6 Pour aller plus loin

- Euclide et la géométrie grecque dans l'archive MacTutor : notice d'Euclide.
- A. Blais, *Least Squares for Practitioners*, pour l'origine de la projection et des moindres carrés : article historique.
- MacTutor, histoire générale du calcul vectoriel : vecteurs et notations.