

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Corrections expliquées

Représentations paramétriques et équations cartésiennes

À consulter après une première recherche personnelle

Utilisation. Cherche d’abord dans le fascicule du cours. Lis son indice si tu es bloquée, puis compare ta démarche avec la correction complète. Une réponse formulée autrement peut être correcte si elle respecte les données et si elle est justifiée. Les exercices sont des créations pédagogiques ; ils ne sont pas présentés comme des sujets officiels du baccalauréat.

Table des matières

1	Diagnostic : réponses et rappels ciblés	3
2	Corrections des exercices 1 et 2 : droites	5
3	Corrections des exercices 3 et 4 : plans et intersection	7
4	Corrections des exercices 5 à 7 : systèmes et projections	8
5	Correction de l'exercice 8 : synthèse	10
6	Rappel différé	11

1 Diagnostic : réponses et rappels ciblés

Correction D1

On utilise « arrivée moins départ » :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (4 - 1; 0 - (-2); -1 - 3) \\ &= (3; 2; -4).\end{aligned}$$

La deuxième coordonnée est positive car $0 - (-2) = 0 + 2 = 2$.

Correction D2

On transforme l'équation en faisant la même opération sur les deux membres :

$$3t - 4 = 11 \quad \Longleftrightarrow \quad 3t = 15 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 5.$$

Correction D3

On multiplie le vecteur par 2 coordonnée par coordonnée :

$$2\vec{u} = (4; -2; 6).$$

Puis on l'ajoute au point A :

$$A + 2\vec{u} = (1; 2; 0) + (4; -2; 6) = (5; 0; 6).$$

Correction D4

On remplace les coordonnées dans l'équation du plan.

$$\begin{aligned}M : \quad & 2 + 2 \times 1 - 0 - 4 = 0, \\ N : \quad & 0 + 2 \times 1 - 0 - 4 = -2 \neq 0.\end{aligned}$$

Donc M appartient au plan et N n'y appartient pas.

Correction D5

On constate que

$$-2\vec{u} = -2(2; -1; 3) = (-4; 2; -6) = \vec{v}.$$

Les deux vecteurs sont donc colinéaires. Ils ont des sens opposés puisque le coefficient de proportionnalité est négatif.

Correction D6

Dans une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$, les trois coefficients de x , y et z donnent un vecteur normal. Ici, on peut prendre

$$\boxed{\vec{n} = (3; -1; 2)}.$$

La constante -5 ne fait pas partie du vecteur normal.

Correction D7

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= 1 \times 2 + 2 \times (-1) + (-1) \times 0 \\ &= 2 - 2 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Les deux vecteurs, qui sont non nuls, sont orthogonaux.

Point de méthode

Le diagnostic fait apparaître le geste à consolider : coordonnées « arrivée moins départ », résolution d’une équation, substitution dans une équation de plan, ou produit scalaire. Une erreur localisée est une bonne indication pour choisir la prochaine révision.

2 Corrections des exercices 1 et 2 : droites

Correction 1 – Écrire et parcourir une droite

On connaît le point $A(2; -1; 3)$ et un vecteur directeur $\vec{u} = (1; 2; -1)$.

a) On écrit $M = A + t\vec{u}$, avec $t \in \mathbb{R}$, puis on lit les trois coordonnées :

$$d : \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 3 - t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) On remplace t dans les trois expressions :

$$M(-1) = (2 - 1; -1 + 2(-1); 3 - (-1)) = (1; -3; 4),$$

$$M(0) = (2; -1; 3),$$

$$M(3) = (2 + 3; -1 + 2 \times 3; 3 - 3) = (5; 5; 0).$$

c) Pour $P(5; 5; 0)$, la première coordonnée donne

$$2 + t = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 3.$$

Avec cette valeur,

$$-1 + 2 \times 3 = 5 \quad \text{et} \quad 3 - 3 = 0.$$

Le même paramètre convient aux trois coordonnées : $P \in d$.

Pour $Q(5; 4; 0)$, la première coordonnée impose encore $t = 3$, mais la deuxième coordonnée de la droite vaut alors $-1 + 2 \times 3 = 5 \neq 4$. Donc $Q \notin d$.

Correction 2 – Deux points déterminent une droite

a) Le vecteur directeur naturel est

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (2 - (-1); -2 - 2; 3 - 0) \\ &= (3; -4; 3). \end{aligned}$$

La droite passant par A et dirigée par ce vecteur peut donc s'écrire

$$(AB) : \begin{cases} x = -1 + 3t, \\ y = 2 - 4t, \\ z = 3t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pour $t = 0$, on retrouve A , et pour $t = 1$, on retrouve B , ce qui contrôle la représentation.

b) Pour $C(5; -6; 6)$, la première coordonnée donne

$$-1 + 3t = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 2.$$

Les deux autres coordonnées donnent alors

$$2 - 4 \times 2 = -6 \quad \text{et} \quad 3 \times 2 = 6.$$

La même valeur de t convient partout : $C \in (AB)$.

c) Pour $D(2; -1; 3)$, la première coordonnée impose $t = 1$. La deuxième coordonnée attendue serait alors

$$2 - 4 \times 1 = -2,$$

et non -1 . Donc $D \notin (AB)$, même si sa première et sa troisième coordonnées conviennent.

d) Pour $t = -1$,

$$M(-1) = (-1 + 3(-1); 2 - 4(-1); 3(-1)) = (-4; 6; -3).$$

3 Corrections des exercices 3 et 4 : plans et intersection

Correction 3 – Construire et reconnaître un plan

a) Soit $M(x; y; z)$ un point quelconque. On a

$$\overrightarrow{AM} = (x - 1; y + 2; z).$$

L'appartenance au plan signifie que ce vecteur est orthogonal au vecteur normal $\vec{n} = (2; 1; -1)$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 &\iff 2(x - 1) + (y + 2) - z = 0 \\ &\iff 2x + y - z = 0.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{P} : 2x + y - z = 0.}$$

b) Pour $M(2; -2; 0)$, le membre de gauche vaut

$$2 \times 2 + (-2) - 0 = 2 \neq 0.$$

Donc $M \notin \mathcal{P}$.

Pour $N(1; -1; 1)$, il vaut

$$2 \times 1 + (-1) - 1 = 0.$$

Donc $N \in \mathcal{P}$.

c) Tout multiple non nul d'un vecteur normal convient. Par exemple,

$$\boxed{\vec{n}' = 2\vec{n} = (4; 2; -2).}$$

Correction 4 – Une droite coupe un plan

a) On remplace les expressions de x, y, z dans l'équation du plan :

$$\begin{aligned}2x - y + z - 5 = 0 &\iff 2(2 - t) - (1 + t) + (1 + 2t) - 5 = 0 \\ &\iff -1 - t = 0 \\ &\iff t = -1.\end{aligned}$$

Il existe une unique valeur du paramètre.

b) On remplace $t = -1$ dans la représentation de la droite :

$$I(2 - (-1); 1 + (-1); 1 + 2(-1)) = \boxed{(3; 0; -1)}.$$

Contrôle dans le plan :

$$2 \times 3 - 0 + (-1) - 5 = 0.$$

c) Un vecteur directeur de la droite est $\vec{u} = (-1; 1; 2)$. Un vecteur normal au plan est $\vec{n} = (2; -1; 1)$. Leur produit scalaire vaut

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = (-1) \times 2 + 1 \times (-1) + 2 \times 1 = -1 \neq 0.$$

La direction de la droite n'est donc pas parallèle au plan. Avec la valeur unique $t = -1$ trouvée à la question a), on conclut que d est sécante au plan en I .

4 Corrections des exercices 5 à 7 : systèmes et projections

Correction 5 – Résoudre un système de deux droites

Un point commun doit avoir une écriture avec un paramètre t sur d et une écriture avec un paramètre s sur d' . On identifie les coordonnées :

$$\begin{aligned}1 + t &= 1 + 2s, \\2 - t &= -1 + s, \\-1 + 2t &= 4 - s.\end{aligned}$$

Les première et deuxième équations se réécrivent

$$t - 2s = 0, \quad t + s = 3.$$

La première donne $t = 2s$. En la remplaçant dans la deuxième, on obtient

$$2s + s = 3 \iff s = 1,$$

donc $t = 2$. Contrôlons dans la troisième équation initiale :

$$-1 + 2 \times 2 = 3 \quad \text{et} \quad 4 - 1 = 3.$$

Le point correspondant est

$$I(1 + t; 2 - t; -1 + 2t) = (3; 0; 3).$$

Dans la seconde droite, on obtient aussi $(1 + 2 \times 1; -1 + 1; 4 - 1) = (3; 0; 3)$. Les droites sont donc sécantes au point

$$\boxed{I(3; 0; 3)}.$$

Correction 6 – Projection sur une droite

a)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= (3 - 0; 2 - 1; 1 - 0) = (3; 1; 1), \\ \vec{u} \cdot \vec{u} &= 1^2 + 2^2 + 1^2 = 6, \\ \overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} &= 3 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 6.\end{aligned}$$

b) Le paramètre du projeté est

$$t_0 = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \frac{6}{6} = 1.$$

c)

$$H = A + t_0 \vec{u} = (0; 1; 0) + (1; 2; 1) = \boxed{(1; 3; 1)}.$$

On calcule ensuite

$$\overrightarrow{PH} = (1 - 3; 3 - 2; 1 - 1) = (-2; 1; 0).$$

La distance est donc

$$\begin{aligned}PH &= \|\overrightarrow{PH}\| \\ &= \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{5} = \boxed{\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PH} \cdot \vec{u} &= (-2) \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 1 \\ &= -2 + 2 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Le segment PH est bien perpendiculaire à la direction de d , ce qui confirme le calcul du projeté.

Correction 7 – Projection sur un plan

a) Les coefficients de x, y, z donnent

$$\vec{n} = (1; 1; 1).$$

Pour le point $P(1; 1; 4)$,

$$\begin{aligned}\delta &= 1 + 1 + 4 - 3 \\ &= 3.\end{aligned}$$

b) Comme $1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$, la formule du projeté donne

$$\begin{aligned}H &= P - \frac{3}{3}(1; 1; 1) \\ &= (1 - 1; 1 - 1; 4 - 1) \\ &= \boxed{(0; 0; 3)}.\end{aligned}$$

c) On remplace les coordonnées de H dans l'équation du plan :

$$0 + 0 + 3 - 3 = 0.$$

Donc $H \in \mathcal{P}$.

d) La norme du vecteur normal vaut $\sqrt{3}$. La distance est donc

$$d(P, \mathcal{P}) = \frac{|\delta|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \boxed{\sqrt{3}}.$$

5 Correction de l'exercice 8 : synthèse

Correction 8 – Trois points, un plan et une droite

a) On calcule

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (1; 1; 0), \\ \overrightarrow{AC} &= (0; 0; 2).\end{aligned}$$

b) Soit $\vec{n} = (a; b; c)$. Pour qu'il soit normal au plan, il doit être orthogonal aux deux directions $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \iff a + b = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 \iff 2c = 0.\end{aligned}$$

On choisit la valeur simple $a = 1$. Alors $b = -1$ et $c = 0$, d'où

$$\boxed{\vec{n} = (1; -1; 0)}.$$

c) Le plan passe par $A(1; 0; 0)$, donc pour un point $M(x; y; z)$, la condition $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ devient

$$(x - 1; y; z) \cdot (1; -1; 0) = 0.$$

Ainsi, une équation cartésienne est

$$\boxed{(ABC) : x - y - 1 = 0}.$$

On vérifie par exemple les trois points : A donne $1 - 0 - 1 = 0$, B donne $2 - 1 - 1 = 0$, et C donne $1 - 0 - 1 = 0$.

d) On substitue la représentation de d dans l'équation du plan :

$$\begin{aligned}x - y - 1 &= 0 \iff (2 + t) - (1 + 2t) - 1 = 0 \\ &\iff -t = 0 \\ &\iff t = 0.\end{aligned}$$

Le point d'intersection est

$$I(2 + 0; 1 + 2 \times 0; 3 - 0) = \boxed{(2; 1; 3)}.$$

Le contrôle est immédiat : $2 - 1 - 1 = 0$.

6 Rappel différé

Correction R1

La droite passe par $A(-2; 1; 0)$ et est dirigée par $\vec{u} = (1; 0; 2)$. Une représentation est

$$d : \begin{cases} x = -2 + t, \\ y = 1, \\ z = 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pour $P(0; 1; 4)$, la première coordonnée donne $-2 + t = 0$, donc $t = 2$. Les deux autres donnent bien $y = 1$ et $z = 4$. Ainsi $P \in d$.

Correction R2

Un vecteur normal est directement lu dans l'équation :

$$\vec{n} = (-1; 2; 1).$$

Pour $M(1; 2; 0)$,

$$-1 + 2 \times 2 + 0 - 3 = 0,$$

donc $M \in \mathcal{P}$. Pour $N(1; 1; 0)$,

$$-1 + 2 \times 1 + 0 - 3 = -2 \neq 0,$$

donc $N \notin \mathcal{P}$.

Correction R3

On remplace les coordonnées de la droite dans l'équation du plan :

$$\begin{aligned} x + y + z - 4 = 0 &\iff (2 - t) + (1 + t) + t - 4 = 0 \\ &\iff t - 1 = 0 \\ &\iff t = 1. \end{aligned}$$

Le point commun est donc

$$I(2 - 1; 1 + 1; 1) = (1; 2; 1).$$

Contrôle : $1 + 2 + 1 - 4 = 0$.

Point de méthode

Pour vérifier une correction, ne compare pas seulement le résultat final : vérifier aussi le sens du vecteur, la valeur commune du paramètre, le contrôle dans l'équation et la phrase géométrique qui conclut.