

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Décrire les droites et les plans de l'espace avec des nombres

Un cours progressif avec exercices et indices

Objectifs

- Décrire une droite de l'espace à l'aide d'un point, d'un vecteur directeur et d'un paramètre réel.
- Reconnaître les points d'une droite ou d'un plan à partir de leurs coordonnées.
- Déterminer et exploiter une équation cartésienne d'un plan à partir d'un vecteur normal et d'un point.
- Traduire une intersection ou une projection par un calcul ou un système, puis interpréter le résultat.

Cadre du cours. Ce chapitre correspond au cœur de la section « Représentations paramétriques et équations cartésiennes » du programme de spécialité de terminale générale. Pour une terminale en 2026–2027, le texte de référence reste le programme du Bulletin officiel spécial n° 8 du 25 juillet 2019 : représentation paramétrique d'une droite, équation cartésienne d'un plan, projections et résolution de systèmes simples dans l'espace. Un nouveau programme a été publié au Bulletin officiel du 2 avril 2026 ; son application en terminale est prévue à partir de la rentrée 2027–2028. Les exercices de ce fascicule sont créés pour l'apprentissage et ne sont pas des sujets officiels.

Organisation conseillée. Prévoir quatre séances de 35 à 45 minutes, avec une pause courte si nécessaire :

1. diagnostic, coordonnées et représentation paramétrique d'une droite ;
2. équation cartésienne d'un plan et appartenance ;
3. intersection d'une droite et d'un plan, puis systèmes ;
4. projections, exercice de synthèse et rappel différé.

Les exercices se trouvent dans ce fascicule avec leurs indices. Les corrections détaillées sont dans le fascicule séparé `corrections.pdf`. Essaie d'abord seule, consulte l'indice si nécessaire, puis seulement la correction.

Table des matières

1	Avant de commencer : diagnostic et rappels	3
2	1. Une droite décrite par un paramètre	4
3	2. Une équation cartésienne de plan	7
4	3. Relier une droite, un plan et un système	9
5	4. Projections orthogonales	11
6	5. Exercices gradués	13
7	Bilan : la méthode en quatre questions	16

1 Avant de commencer : diagnostic et rappels

Durée indicative : 12 minutes, sans note et sans calculatrice. Ce diagnostic sert à repérer les gestes à reprendre, pas à attribuer une note. Si une question bloque, écrire simplement « à revoir » et continuer. Les réponses sont dans le fascicule séparé des corrections.

D1. Avec $A(1; -2; 3)$ et $B(4; 0; -1)$, calculer $\overrightarrow{AB}$.

D2. Résoudre l'équation $3t - 4 = 11$.

D3. Soient $A(1; 2; 0)$ et $\vec{u} = (2; -1; 3)$. Calculer les coordonnées du point $A + 2\vec{u}$.

D4. Le point $M(2; 1; 0)$ appartient-il au plan d'équation $x + 2y - z - 4 = 0$? Et le point $N(0; 1; 0)$?

D5. Les vecteurs $\vec{u} = (2; -1; 3)$ et $\vec{v} = (-4; 2; -6)$ sont-ils colinéaires?

D6. Donner un vecteur normal au plan d'équation $3x - y + 2z - 5 = 0$.

D7. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pour $\vec{u} = (1; 2; -1)$ et $\vec{v} = (2; -1; 0)$. Que peut-on en déduire?

1.1 Les prérequis indispensables

Coordonnées d'un vecteur. Dans un repère de l'espace, si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$, alors

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$$

On retient « arrivée moins départ ». Par exemple,

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 1; 0 - (-2); -1 - 3) = (3; 2; -4).$$

Résoudre une équation. On transforme les deux membres de la même façon :

$$3t - 4 = 11 \quad \Longleftrightarrow \quad 3t = 15 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 5.$$

Produit scalaire. Pour $\vec{u} = (a; b; c)$ et $\vec{v} = (a'; b'; c')$, dans un repère orthonormé,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb' + cc'.$$

Si le résultat est nul, les deux vecteurs non nuls sont orthogonaux. Cette idée permettra de reconnaître un vecteur normal à un plan.

Colinéarité. Deux vecteurs sont colinéaires lorsqu'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$. Ils donnent alors la même direction, même si leurs sens sont opposés.

Repère orthonormé. Les trois axes sont perpendiculaires deux à deux et utilisent la même unité de longueur. C'est le cadre supposé dans ce cours.

À retenir

Dans un calcul de géométrie repérée, commencer par identifier ce que représente chaque nombre : une coordonnée de point, une coordonnée de vecteur, un paramètre ou un coefficient d'équation.

2 1. Une droite décrite par un paramètre

2.1 L'idée essentielle : un seul nombre pour se déplacer

Pour décrire une droite, on choisit un point de départ A et une direction non nulle $\vec{u}$. Un nombre réel t , appelé le **paramètre**, indique jusqu'où l'on se déplace dans cette direction.

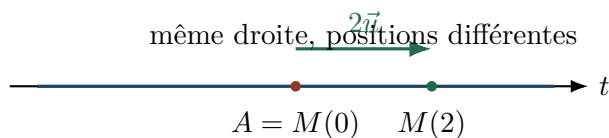


FIGURE 1 – Le paramètre indique la position sur la droite : $t < 0$ est de l'autre côté de A , $t = 0$ donne A , et $t > 0$ avance dans la direction de $\vec{u}$.

2.2 Définition et écriture coordonnée

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point et soit $\vec{u} = (a; b; c)$ un vecteur non nul. La droite d passant par A et dirigée par $\vec{u}$ est l'ensemble des points

$$M(t) = A + t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Le même énoncé, coordonnée par coordonnée, s'écrit

$$d : \begin{cases} x = x_A + at, \\ y = y_A + bt, \\ z = z_A + ct, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Le vecteur $\vec{u}$ doit être non nul : sinon les trois coordonnées restent fixes et l'on obtient un seul point, pas une droite.

Exemple entièrement détaillé

On considère le point $A(1; -1; 2)$ et le vecteur directeur $\vec{u} = (2; 3; -1)$. La droite est

$$d : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -1 + 3t, \\ z = 2 - t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pour $t = 0$, on retrouve $A(1; -1; 2)$. Pour $t = 2$, on obtient

$$M(2)(1 + 2 \times 2; -1 + 3 \times 2; 2 - 2) = (5; 5; 0).$$

Pour $t = -1$, on obtient

$$M(-1)(1 - 2; -1 - 3; 2 + 1) = (-1; -4; 3).$$

Les valeurs positives et négatives du paramètre parcourent les deux côtés de la droite.

2.3 Construire une droite avec deux points

Pour construire la droite passant par deux points distincts A et B , on choisit le vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$:

$$\boxed{\text{droite } (AB) : \quad M = A + t\overrightarrow{AB}, \quad t \in \mathbb{R}.}$$

Il faut vérifier que $A \neq B$, afin que $\overrightarrow{AB}$ ne soit pas le vecteur nul.

Exemple entièrement détaillé

Soient $A(1; 0; 2)$ et $B(3; -2; 1)$. On calcule d'abord le vecteur directeur :

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 1; -2 - 0; 1 - 2) = (2; -2; -1).$$

Une représentation paramétrique de (AB) est donc

$$(AB) : \quad \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2t, \\ z = 2 - t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pour contrôler le calcul, $t = 0$ donne A , et $t = 1$ donne $B(3; -2; 1)$. La représentation passe bien par les deux points.

2.4 Reconnaître un point de la droite

Pour savoir si un point $P(x_P; y_P; z_P)$ appartient à une droite donnée par trois expressions en t , on cherche une **même valeur** de t qui convient aux trois coordonnées.

Méthode

1. Utiliser une coordonnée simple pour trouver une valeur possible de t .
2. Remplacer cette valeur dans les deux autres coordonnées.
3. Si les trois égalités sont vérifiées, le point appartient à la droite; sinon, il n'y appartient pas.

Exemple entièrement détaillé

Pour la droite

$$d : \quad \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -1 + 3t, \\ z = 2 - t, \end{cases}$$

testons $P(5; 5; 0)$. La première coordonnée donne $1 + 2t = 5$, donc $t = 2$. Avec cette valeur,

$$-1 + 3 \times 2 = 5 \quad \text{et} \quad 2 - 2 = 0.$$

Les trois coordonnées conviennent : $P \in d$.

Pour $Q(5; 4; 0)$, la première coordonnée impose encore $t = 2$, mais la deuxième donnerait $-1 + 3 \times 2 = 5 \neq 4$. Il n'existe donc pas de paramètre commun et $Q \notin d$.

2.5 Une droite peut avoir plusieurs représentations

Le choix du point et du vecteur directeur n'est pas unique. On peut :

- partir de n'importe quel point de la droite;

— remplacer $\vec{u}$ par $k\vec{u}$, avec $k \neq 0$, en changeant éventuellement le paramètre.

Ainsi, $(1; 2; 0) + t(2; -1; 3)$ et $(5; 0; 6) + s(4; -2; 6)$ décrivent la même droite : le second point correspond à $t = 2$, et le second vecteur vaut $2\vec{u}$.

À retenir

Pour une droite, retenir la chaîne point de départ + paramètre $\times$ vecteur directeur. Dans la forme coordonnée, le même paramètre t doit apparaître dans les trois lignes.

3 2. Une équation cartésienne de plan

3.1 L'idée essentielle : le vecteur normal filtre les points

Un plan possède deux directions indépendantes. Un vecteur $\vec{n}$ est **normal** au plan lorsqu'il est perpendiculaire à toutes ses directions. Pour un point M , dire que M est dans le plan passant par A revient à dire que $\overrightarrow{AM}$ est perpendiculaire à $\vec{n}$.

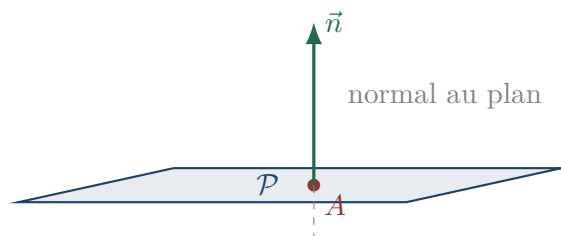


FIGURE 2 – Le vecteur normal est perpendiculaire au plan. Une équation du plan traduit l'orthogonalité de $\overrightarrow{AM}$ avec ce vecteur.

3.2 Formule à connaître et à comprendre

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point et soit $\vec{n} = (a; b; c) \neq \vec{0}$ un vecteur normal. Pour un point quelconque $M(x; y; z)$,

$$\overrightarrow{AM} = (x - x_A; y - y_A; z - z_A).$$

La condition d'appartenance au plan est

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$

En développant le produit scalaire, on obtient

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Après développement, cette équation prend la forme

$$ax + by + cz + d = 0,$$

où d est une constante. Les trois coefficients a, b, c ne doivent pas être simultanément nuls.

Exemple entièrement détaillé

On cherche une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(1; 0; 2)$ et normal au vecteur $\vec{n} = (2; -1; 1)$.

Soit $M(x; y; z)$ un point quelconque. On écrit le vecteur qui relie A à M :

$$\overrightarrow{AM} = (x - 1; y; z - 2).$$

On traduit l'orthogonalité avec $\vec{n}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 &\iff 2(x - 1) - y + (z - 2) = 0 \\ &\iff 2x - y + z - 4 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathcal{P} : 2x - y + z - 4 = 0.$$

Contrôle du point connu : $2 \times 1 - 0 + 2 - 4 = 0$. Les coordonnées de $\vec{n}$ sont bien les coefficients de x, y, z .

3.3 Reconnaître un plan et vérifier une appartenance

Pour un plan $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$, un vecteur normal est

$$\vec{n} = (a; b; c).$$

Un multiple non nul de ce vecteur convient également. Par exemple, $(2; -1; 1)$ et $(-4; 2; -2)$ sont deux vecteurs normaux au même plan.

Pour tester si $P(x_P; y_P; z_P)$ appartient à $\mathcal{P}$, on remplace les trois variables par les coordonnées de P . Il faut obtenir exactement zéro, et non une valeur seulement « proche » de zéro dans un calcul exact.

Exemple entièrement détaillé

Dans le plan $\mathcal{P} : 2x - y + z - 4 = 0$, testons $P(2; 1; 0)$ et $Q(1; 1; 1)$.

$$P : 2 \times 2 - 1 + 0 - 4 = -1 \neq 0,$$

$$Q : 2 \times 1 - 1 + 1 - 4 = -2 \neq 0.$$

Ni P ni Q n'appartient à ce plan. En revanche, le point $A(1; 0; 2)$ de l'exemple donne bien zéro.

3.4 Quand le vecteur normal n'est pas donné

Si un plan contient trois points non alignés A , B et C , on peut chercher un vecteur normal $\vec{n} = (a; b; c)$ en utilisant les deux directions du plan $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

Cela fournit un petit système. On choisit ensuite une solution non nulle et on utilise la formule précédente avec le point A .

Exemple entièrement détaillé

Soient $A(0; 0; 0)$, $B(1; 1; 0)$ et $C(1; 0; 1)$. On calcule

$$\overrightarrow{AB} = (1; 1; 0), \quad \overrightarrow{AC} = (1; 0; 1).$$

Pour $\vec{n} = (a; b; c)$, les orthogonalités donnent

$$a + b = 0,$$

$$a + c = 0.$$

On peut choisir $a = 1$. Alors $b = -1$ et $c = -1$, d'où $\vec{n} = (1; -1; -1)$. Comme le plan passe par l'origine, son équation est

$$x - y - z = 0.$$

Le choix d'un autre multiple non nul de $\vec{n}$ aurait donné une équation équivalente.

À retenir

Pour une équation $ax + by + cz + d = 0$, lire immédiatement le vecteur normal $(a; b; c)$. Pour construire le plan, partir d'un point connu et écrire $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

4 3. Relier une droite, un plan et un système

4.1 Intersection d'une droite et d'un plan

On considère une droite donnée par

$$\begin{cases} x = x_A + at, \\ y = y_A + bt, \\ z = z_A + ct, \end{cases}$$

et un plan $\mathcal{P} : px + qy + rz + s = 0$. Pour chercher leur intersection, on remplace x, y, z par les expressions en t dans l'équation du plan. On obtient une seule équation à une inconnue.

Méthode

Après substitution :

- une unique valeur de t donne un point d'intersection : la droite est sécante au plan ;
- aucune valeur de t donne une droite sans point commun avec le plan ; si sa direction est parallèle au plan, on parle de droite strictement parallèle ;
- toutes les valeurs de t conviennent lorsque la droite est contenue dans le plan.

Le coefficient de t après substitution est

$$pa + qb + rc = \vec{u} \cdot (p; q; r),$$

où $\vec{u} = (a; b; c)$ est un vecteur directeur de la droite et $(p; q; r)$ un vecteur normal au plan. Cela explique le cas parallèle : un vecteur directeur parallèle au plan est orthogonal à un vecteur normal.

Exemple entièrement détaillé

On considère la droite

$$d : \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -t, \\ z = 2 + t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

et le plan $\mathcal{P} : x + y + z - 5 = 0$.

On remplace les coordonnées de la droite dans l'équation du plan :

$$\begin{aligned} (1 + 2t) + (-t) + (2 + t) - 5 &= 0 \\ 2t - 2 &= 0 \\ t &= 1. \end{aligned}$$

Il existe une seule valeur du paramètre. Le point d'intersection est obtenu en remplaçant $t = 1$ dans les trois expressions :

$$I(1 + 2; -1; 2 + 1) = (3; -1; 3).$$

Contrôle : $3 + (-1) + 3 - 5 = 0$. Donc $d \cap \mathcal{P} = \{I\}$.

4.2 Intersection de deux droites

Pour deux droites, on utilise deux paramètres différents :

$$d : M = A + t\vec{u}, \quad d' : N = B + s\vec{v}.$$

Un point commun doit avoir les mêmes coordonnées dans les deux écritures. On résout donc le système obtenu en identifiant les trois coordonnées. Il faut éviter d'utiliser le même symbole pour les deux paramètres : t et s peuvent prendre des valeurs différentes.

Exemple entièrement détaillé

Soient

$$d : \begin{cases} x = t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 3 - t, \end{cases} \quad d' : \begin{cases} x = 3 - s, \\ y = 2 + s, \\ z = -1 + 2s. \end{cases}$$

Pour un point commun, on obtient

$$\begin{aligned} t &= 3 - s, \\ -1 + 2t &= 2 + s, \\ 3 - t &= -1 + 2s. \end{aligned}$$

Les première et troisième équations donnent

$$t + s = 3, \quad t + 2s = 4.$$

En soustrayant la première de la deuxième, on obtient $s = 1$, puis $t = 2$. La deuxième équation initiale est vérifiée : $-1 + 2 \times 2 = 3 = 2 + 1$.

Le point commun est donc

$$I(2; 3; 1).$$

Les deux droites sont sécantes en I .

4.3 Traduire un problème géométrique

Avant de calculer, écrire ce que signifie la question :

- « M appartient à la droite » signifie qu'il existe un paramètre t qui vérifie les trois expressions ;
- « M appartient au plan » signifie que ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne ;
- « M est à l'intersection » signifie qu'il satisfait simultanément les deux conditions ;
- « une droite est parallèle à un plan » peut se tester avec le produit scalaire entre un vecteur directeur et un vecteur normal, puis avec un test d'appartenance pour distinguer une droite contenue du plan.

Attention. Un système sans solution signifie seulement « aucun point commun ». Pour conclure « droites parallèles » dans l'espace, il faut aussi examiner les directions et la position des droites ; deux droites peuvent être non coplanaires.

À retenir

Un système n'est pas une suite de nombres sans sens : chaque inconnue représente une position sur une droite. À la fin, traduire les valeurs trouvées en un point et en une phrase géométrique.

5 4. Projections orthogonales

5.1 Projeté d'un point sur une droite

Soit P un point et soit d une droite passant par A et dirigée par $\vec{u} \neq \vec{0}$. Le projeté orthogonal H de P sur d est le point de d tel que PH soit perpendiculaire à la droite. On écrit donc

$$H = A + t_0 \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{PH} \cdot \vec{u} = 0.$$

Comme $\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{AP} - t_0 \vec{u}$, et que l'orthogonalité ne change pas lorsqu'on inverse le sens d'un vecteur, on obtient

$$t_0 = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

Puis on calcule $H = A + t_0 \vec{u}$. La distance du point à la droite est PH .

Exemple entièrement détaillé

On considère

$$d: M = A + t\vec{u}, \quad A(1; 0; 0), \quad \vec{u} = (2; 1; 0),$$

et $P(1; 5; 2)$. On commence par calculer

$$\overrightarrow{AP} = (0; 5; 2).$$

Alors

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} &= 0 \times 2 + 5 \times 1 + 2 \times 0 = 5, \\ \vec{u} \cdot \vec{u} &= 2^2 + 1^2 + 0^2 = 5. \end{aligned}$$

Donc $t_0 = 5/5 = 1$, puis

$$H = A + \vec{u} = (3; 1; 0).$$

Contrôlons la perpendicularité :

$$\overrightarrow{PH} = (2; -4; -2), \quad \overrightarrow{PH} \cdot \vec{u} = 2 \times 2 - 4 \times 1 - 2 \times 0 = 0.$$

Enfin,

$$d(P, d) = PH = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

5.2 Projeté d'un point sur un plan

Soit le plan

$$\mathcal{P}: ax + by + cz + d = 0, \quad (a; b; c) \neq (0; 0; 0),$$

et le point $P(x_P; y_P; z_P)$. Un vecteur normal est $\vec{n} = (a; b; c)$. Posons

$$\delta = ax_P + by_P + cz_P + d.$$

Le projeté H de P sur le plan est obtenu en se déplaçant depuis P dans la direction normale :

$$H = P - \frac{\delta}{a^2 + b^2 + c^2}(a; b; c).$$

La distance au plan est

$$d(P, \mathcal{P}) = \frac{|\delta|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Le nombre δ n'est pas encore une distance : il faut le diviser par la norme du vecteur normal.

Exemple entièrement détaillé

On considère $\mathcal{P} : x + 2y + 2z - 6 = 0$ et $P(2; 1; 2)$. On a

$$\vec{n} = (1; 2; 2), \text{quad} \delta = 2 + 2 \times 1 + 2 \times 2 - 6 = 2,$$

et

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 = 9.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} H &= P - \frac{2}{9}(1; 2; 2) \\ &= (2 - 2/9; 1 - 4/9; 2 - 4/9) = (16/9; 5/9; 14/9). \end{aligned}$$

Contrôle dans le plan :

$$\frac{16}{9} + 2 \times \frac{5}{9} + 2 \times \frac{14}{9} - 6 = \frac{54}{9} - 6 = 0.$$

La distance vaut

$$d(P, \mathcal{P}) = \frac{|2|}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}.$$

À retenir

Une projection se contrôle toujours avec deux informations : le point projeté appartient à la droite ou au plan, et le segment qui relie le point de départ au projeté est perpendiculaire à la direction ou au plan.

6 5. Exercices gradués

Les exercices 1 et 2 entraînent la représentation d'une droite. Les exercices 3 et 4 travaillent les plans et les intersections. Les exercices 5 à 8 sont des entraînements plus autonomes. Les corrections détaillées, avec les calculs et les contrôles, sont dans le fascicule séparé.

Exercice 1 – Écrire et parcourir une droite

Compétence : construire une représentation paramétrique et calculer des points.

On considère $A(2; -1; 3)$ et le vecteur non nul $\vec{u} = (1; 2; -1)$.

- Écrire une représentation paramétrique de la droite d passant par A et dirigée par $\vec{u}$.
- Calculer les coordonnées de $M(-1)$, $M(0)$ et $M(3)$.
- Le point $P(5; 5; 0)$ appartient-il à d ? Et le point $Q(5; 4; 0)$? Justifier avec le paramètre.

Indice.

Pour la question a), commencer par $M = A + t\vec{u}$. Pour la question c), la coordonnée x de P impose une valeur de t : réutiliser cette valeur dans les deux autres coordonnées.

Exercice 2 – Deux points déterminent une droite

Compétence : utiliser $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur directeur et reconnaître un point de la droite.

Soient $A(-1; 2; 0)$ et $B(2; -2; 3)$.

- Calculer $\overrightarrow{AB}$, puis donner une représentation paramétrique de la droite (AB) .
- Le point $C(5; -6; 6)$ appartient-il à (AB) ?
- Le point $D(2; -1; 3)$ appartient-il à (AB) ?
- Donner les coordonnées du point correspondant à $t = -1$ dans votre représentation.

Indice.

Dans la représentation $A + t\overrightarrow{AB}$, le point B correspond à $t = 1$. Pour un point testé, une seule valeur de t doit fonctionner dans les trois coordonnées.

Exercice 3 – Construire et reconnaître un plan

Compétence : déterminer une équation cartésienne à partir d'un point et d'un vecteur normal.

Le plan $\mathcal{P}$ passe par $A(1; -2; 0)$ et admet pour vecteur normal $\vec{n} = (2; 1; -1)$.

- Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
- Tester l'appartenance des points $M(2; -2; 0)$ et $N(1; -1; 1)$ à $\mathcal{P}$.
- Donner un autre vecteur normal au même plan en utilisant un multiple non nul de $\vec{n}$.

Indice.

Pour a), écrire $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, avec $M(x; y; z)$. Pour b), remplacer x, y, z par les coordonnées du point dans l'équation obtenue.

Exercice 4 – Une droite coupe un plan

Compétence : substituer une représentation paramétrique dans une équation cartésienne et interpréter la valeur du paramètre.

On considère

$$d : \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 1 + t, \\ z = 1 + 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

et le plan $\mathcal{P} : 2x - y + z - 5 = 0$.

- Déterminer la valeur de t pour laquelle un point de d est dans $\mathcal{P}$.
- En déduire les coordonnées du point d'intersection I .
- Justifier que la droite est sécante au plan. On pourra comparer un vecteur directeur de d et un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Indice.

Remplacer les trois expressions de x, y, z dans $2x - y + z - 5 = 0$. Une unique solution en t correspond à un unique point commun.

Exercice 5 – Résoudre un système de deux droites

Compétence : introduire deux paramètres et interpréter un système.

On considère les droites

$$d : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 - t, \\ z = -1 + 2t, \end{cases} \quad d' : \begin{cases} x = 1 + 2s, \\ y = -1 + s, \\ z = 4 - s, \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Déterminer si les droites sont sécantes. Si elles le sont, calculer leur point commun et rédiger une phrase de conclusion.

Indice.

À un point commun correspondent les trois égalités $1 + t = 1 + 2s$, $2 - t = -1 + s$ et $-1 + 2t = 4 - s$. Utiliser deux équations pour trouver t, s , puis contrôler avec la troisième.

Exercice 6 – Projection sur une droite

Compétence : appliquer la formule de projection et contrôler une orthogonalité.

La droite d passe par $A(0; 1; 0)$ et est dirigée par $\vec{u} = (1; 2; 1)$. On projette le point $P(3; 2; 1)$ sur d .

- Calculer $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u} \cdot \vec{u}$ et $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u}$.
- En déduire le paramètre t_0 du projeté $H = A + t_0 \vec{u}$.
- Donner H , puis calculer la distance PH .
- Vérifier que $\overrightarrow{PH} \cdot \vec{u} = 0$.

Indice.

Utiliser $t_0 = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}$. Pour la distance, calculer la norme de $\overrightarrow{PH}$.

Exercice 7 – Projection sur un plan

Compétence : utiliser une équation cartésienne pour déterminer un projeté et une distance.

On considère le plan

$$\mathcal{P} : x + y + z - 3 = 0$$

et le point $P(1; 1; 4)$.

- Donner un vecteur normal $\vec{n}$ et calculer $\delta = 1 + 1 + 4 - 3$.
- Calculer le projeté H de P sur $\mathcal{P}$.
- Vérifier que H appartient au plan.
- Calculer la distance de P au plan.

Indice.

Ici $\vec{n} = (1; 1; 1)$ et $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Utiliser $H = P - \frac{\delta}{3}\vec{n}$.

Exercice 8 – Synthèse : trois points, un plan et une droite

Compétence : construire un vecteur normal avec un système, puis intersecter un plan et une droite.

On considère les points $A(1; 0; 0)$, $B(2; 1; 0)$ et $C(1; 0; 2)$, ainsi que la droite

$$d : \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 3 - t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- Chercher un vecteur normal $\vec{n} = (a; b; c)$ au plan (ABC) en écrivant les deux équations d'orthogonalité. Choisir une solution non nulle simple.
- En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .
- Déterminer le point d'intersection de d et du plan (ABC) .

Indice.

Les équations de la question b) sont $a + b = 0$ et $2c = 0$. Pour obtenir la constante de l'équation cartésienne, utiliser ensuite le point A .

6.1 Rappel différencié

Ces trois questions sont à refaire quelques jours plus tard, sans relire tout le cours. Les réponses sont dans le fascicule des corrections.

- R1.** Donner une représentation paramétrique de la droite passant par $A(-2; 1; 0)$ et dirigée par $\vec{u} = (1; 0; 2)$. Le point $P(0; 1; 4)$ appartient-il à cette droite ?
- R2.** Pour le plan $\mathcal{P} : -x + 2y + z - 3 = 0$, donner un vecteur normal et tester les points $M(1; 2; 0)$ et $N(1; 1; 0)$.
- R3.** Déterminer l'intersection de $d : x = 2 - t, y = 1 + t, z = t$ avec le plan $x + y + z - 4 = 0$.

7 Bilan : la méthode en quatre questions

7.1 La fiche réflexe

Avant de commencer un exercice, se poser les questions suivantes :

1. **Quel est l'objet ?** Une droite, un plan, un point, une intersection ou une projection ?
2. **Quelle donnée dirige l'objet ?** Pour une droite, chercher un point et un vecteur directeur. Pour un plan, chercher un point et un vecteur normal.
3. **Quelle traduction algébrique convient ?** Paramètre pour une droite, équation cartésienne pour un plan, système pour un point commun, produit scalaire nul pour une perpendicularité.
4. **Que signifie le résultat ?** Donner les coordonnées, vérifier l'équation ou l'orthogonalité, puis écrire une phrase géométrique.

7.2 Erreurs fréquentes

- Utiliser trois paramètres différents dans les trois coordonnées d'une même droite : il faut un seul paramètre t .
- Écrire $\overrightarrow{AB} = (x_A - x_B; \dots)$: c'est arrivée moins départ, donc $B - A$.
- Oublier le signe moins devant une coordonnée négative, par exemple $0 - (-2) = 2$.
- Lire le vecteur normal d'un plan comme $(a; b; c; d)$: la constante d n'est pas une coordonnée du vecteur normal.
- Conclure trop vite qu'un point appartient à une droite après avoir vérifié une seule coordonnée : le même paramètre doit vérifier les trois.
- Appeler $\delta = ax_P + by_P + cz_P + d$ une distance : la distance est $|\delta|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

7.3 Auto-évaluation

Cocher ce qui est possible aujourd'hui :

- ☐ Je sais écrire $M = A + t\vec{u}$ et sa forme coordonnée.
- ☐ Je sais vérifier l'appartenance d'un point à une droite.
- ☐ Je sais construire $ax + by + cz + d = 0$ avec un point et un normal.
- ☐ Je sais remplacer une droite dans l'équation d'un plan.
- ☐ Je sais utiliser un système et interpréter ses paramètres.
- ☐ Je sais contrôler une projection par appartenance et orthogonalité.

Si une case reste vide, reprendre uniquement la section correspondante et un exercice associé. Une démarche partielle correctement expliquée est déjà un point d'appui pour la suite.