

## Fiche d'histoire mathématique

# Décrire une droite avec un paramètre

De la géométrie constructive à la géométrie analytique

**Idée directrice.** Une représentation paramétrique ne donne pas une seule position : elle décrit toute une trajectoire. Un nombre  $t$  indique jusqu'où l'on avance dans une direction donnée. Cette manière de penser relie la géométrie, la mécanique et les systèmes d'équations.

## Table des matières

|   |                                                       |   |
|---|-------------------------------------------------------|---|
| 1 | Avant les équations : construire une ligne            | 1 |
| 2 | Descartes et Fermat : équations et lieux géométriques | 1 |
| 3 | Le paramètre comme temps et comme position            | 1 |
| 4 | Plans, intersections et géométrie moderne             | 2 |
| 5 | Ce que l'histoire éclaire dans le cours               | 2 |
| 6 | Pour aller plus loin                                  | 2 |

## 1 Avant les équations : construire une ligne

Dans la géométrie grecque, une droite est une figure définie par ses propriétés et ses constructions. On peut tracer une droite passant par deux points, mais on ne dispose pas encore d'une écriture qui donne chacun de ses points par des nombres.

Les astronomes utilisent déjà des directions et des repères liés à la sphère céleste. Les cartes et les tables de positions montrent qu'il est utile de faire correspondre des nombres à des points, mais la correspondance entre une équation et une courbe n'est pas encore systématique.

## 2 Descartes et Fermat : équations et lieux géométriques

Au XVII<sup>e</sup> siècle, René Descartes publie *La Géométrie* en 1637. Pierre de Fermat développe de manière indépendante une méthode proche. Ils montrent qu'une relation entre des nombres peut décrire un lieu de points. Cette géométrie analytique permet de passer de la figure au calcul et du calcul à la figure.

Pour une droite passant par  $A$  et dirigée par  $\vec{u}$ , l'écriture moderne

$$M = A + t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R},$$

condense une idée géométrique simple : partir de  $A$ , avancer dans la direction  $\vec{u}$ , puis éventuellement repartir en sens inverse si  $t < 0$ . La forme paramétrique actuelle est la traduction coordonnée de cette idée.

### 3 Le paramètre comme temps et comme position

La mécanique donne au paramètre une interprétation immédiate. Si la position d'un mobile est  $M(t)$ , alors  $t$  peut représenter le temps. Une trajectoire rectiligne à vitesse constante s'écrit comme une droite paramétrée ; une trajectoire plus complexe s'obtient en faisant dépendre plusieurs coordonnées du même paramètre.

Cette écriture évite parfois de résoudre une équation pour une coordonnée. Elle conserve l'information de parcours : deux points peuvent être sur la même droite, mais des valeurs différentes de  $t$  indiquent où ils se situent sur la trajectoire.

### 4 Plans, intersections et géométrie moderne

La même logique décrit un plan avec deux directions indépendantes :

$$M = A + s\vec{u} + t\vec{v}.$$

Au XIX<sup>e</sup> siècle, la géométrie affine et la géométrie projective clarifient le rôle des directions, des parallélismes et des transformations. Les équations cartésiennes et les représentations paramétriques deviennent deux descriptions complémentaires d'un même objet.

Aujourd'hui, les logiciels de dessin, la conception assistée par ordinateur, la robotique et les jeux vidéo utilisent des trajectoires paramétrées. Une intersection n'est plus seulement un point trouvé sur papier : elle peut correspondre à la collision d'un rayon avec un objet ou au mouvement d'un bras robotisé.

| Repère                                        | Apport                                                          |
|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| Antiquité                                     | Décrire et construire des droites par leurs propriétés.         |
| 1637                                          | Descartes relie courbes et équations dans <i>La Géométrie</i> . |
| XVII <sup>e</sup> –XVIII <sup>e</sup> siècles | La mécanique donne un sens de trajectoire au paramètre.         |
| XIX <sup>e</sup> siècle à aujourd'hui         | Géométrie affine, calcul scientifique et modélisation.          |

### 5 Ce que l'histoire éclaire dans le cours

- Un paramètre décrit une famille de points ; il ne désigne pas une nouvelle coordonnée fixée une fois pour toutes.
- Une équation cartésienne sélectionne les points qui satisfont une condition ; une représentation paramétrique les parcourt.
- Résoudre une intersection revient à demander quelles valeurs des paramètres décrivent le même point.
- Le choix d'un point et d'une direction n'est pas arbitraire : il traduit la construction géométrique de l'objet.

**À retenir.** Les représentations paramétriques sont un langage de construction : elles racontent comment atteindre tous les points d'une droite ou d'un plan. Les équations cartésiennes sont un langage de filtrage : elles disent quels points sont autorisés.

## 6 Pour aller plus loin

- Mathematical Association of America, histoire de la géométrie analytique : Descartes et Fermat.
- Encyclopaedia of Mathematics, article sur la géométrie analytique : coordonnées et équations.
- Stanford Encyclopedia of Philosophy, *Descartes' Mathematics* : algèbre et géométrie.