

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Corrections expliquées

Suites numériques

À consulter après une première recherche personnelle

Utilisation. Cherche d’abord dans le fascicule du cours. Lis son indice si tu es bloquée, puis compare ta démarche avec la correction complète. Une réponse formulée autrement peut être correcte si elle respecte les données et si elle est justifiée. Les exercices sont des créations pédagogiques ; ils ne sont pas présentés comme des sujets officiels du baccalauréat.

Table des matières

1	Diagnostic : réponses et rappels ciblés	3
2	Corrections des exercices 1 et 2 : lire et additionner	5
3	Corrections des exercices 3 et 4 : pourcentages et modèles	6
4	Corrections des exercices 5 et 6 : récurrence et convergence	7
5	Corrections des exercices 7 et 8 : limites	9
6	Corrections des exercices 9 et 10 : modélisation et synthèse	10
7	Rappel différé : réponses expliquées	12

1 Diagnostic : réponses et rappels ciblés

Correction D1

La multiplication est prioritaire :

$$7 - 2 \times 3 = 7 - 6 = 1.$$

Correction D2

On met les deux fractions au dénominateur 8 :

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}.$$

Correction D3

Comme l'exposant est impair,

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = 4 \times (-2) = -8.$$

De plus, $10^2 = 10 \times 10 = 100$. Une puissance impaire conserve le signe du nombre de départ ; une puissance paire d'un nombre non nul donne un résultat positif.

Correction D4

On soustrait 5 aux deux membres puis on divise par 3 :

$$\begin{aligned} 3x + 5 = 20 &\iff 3x = 15 \\ &\iff x = 5. \end{aligned}$$

Correction D5

Une hausse de 15 % correspond au coefficient $1 + 15/100 = 1,15$. Le nouveau prix est

$$80 \times 1,15 = 92 \text{ euros.}$$

Correction D6

On remplace le rang dans $u_n = 3n - 2$:

$$u_0 = 3 \times 0 - 2 = -2, \quad u_4 = 3 \times 4 - 2 = 12 - 2 = 10.$$

Correction D7

La relation est $v_{n+1} = v_n - 2$. On calcule dans l'ordre :

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 - 2 = 5 - 2 = 3, \\ v_2 &= v_1 - 2 = 3 - 2 = 1, \\ v_3 &= v_2 - 2 = 1 - 2 = -1. \end{aligned}$$

Correction D8

Pour 4, 7, 10, 13, les différences sont $7 - 4 = 3$, $10 - 7 = 3$, $13 - 10 = 3$. Elles sont constantes : la liste correspond au début d'une suite arithmétique.

Pour 3, 6, 12, 24, les rapports sont $6/3 = 2$, $12/6 = 2$, $24/12 = 2$. Ils sont constants : la liste correspond au début d'une suite géométrique de raison 2.

Point de méthode

Le diagnostic vérifie les gestes qui soutiennent le chapitre : calcul avec signes et fractions, pourcentage, équation, indexation et comparaison des différences ou des rapports. Une erreur localisée indique le rappel à reprendre.

2 Corrections des exercices 1 et 2 : lire et additionner

Correction 1 – Rang et modes de génération

a) La suite est donnée par $u_n = 2n - 3$. On remplace le rang :

$$u_0 = 2 \times 0 - 3 = -3, \quad u_4 = 2 \times 4 - 3 = 8 - 3 = 5.$$

b) Chercher le rang du terme 13 revient à résoudre $u_n = 13$:

$$\begin{aligned} 2n - 3 = 13 &\iff 2n = 16 \\ &\iff n = 8. \end{aligned}$$

Le rang 8 est naturel, donc $u_8 = 13$.

c) On utilise successivement la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 + 4 = 1 + 4 = 5, \\ v_2 &= v_1 + 4 = 5 + 4 = 9, \\ v_3 &= v_2 + 4 = 9 + 4 = 13. \end{aligned}$$

d) La suite (u_n) est définie explicitement par une formule en fonction de n . La suite (v_n) est définie par récurrence : elle donne le premier terme et la règle de passage au suivant.

Correction 2 – Suite arithmétique : augmentation fixe

a) La relation s'écrit

$$a_{n+1} = a_n + 5.$$

On ajoute toujours le même nombre : (a_n) est arithmétique de raison $r = 5$.

b) Pour une suite arithmétique commençant par a_0 ,

$$a_n = a_0 + nr = 18 + 5n.$$

Ainsi,

$$a_{12} = 18 + 5 \times 12 = 18 + 60 = 78.$$

c) Du rang 0 au rang 12, il y a $12 - 0 + 1 = 13$ termes. La somme vaut donc

$$\begin{aligned} S &= \frac{13(a_0 + a_{12})}{2} \\ &= \frac{13(18 + 78)}{2} \\ &= \frac{13 \times 96}{2} = 13 \times 48 = 624. \end{aligned}$$

d) Comme la raison 5 est positive, la suite est strictement croissante. On peut aussi le justifier par $a_{n+1} - a_n = 5 > 0$.

3 Corrections des exercices 3 et 4 : pourcentages et modèles

Correction 3 – Suite géométrique et pourcentage

a) Une perte de 12 % laisse $100 - 12 = 88$ % de la quantité, soit le coefficient

$$q = \frac{88}{100} = 0,88.$$

La relation est $b_{n+1} = 0,88b_n$, avec $b_0 = 600$. Donc

$$b_1 = 0,88 \times 600 = 528,$$

$$b_2 = 0,88 \times 528 = 464,64.$$

b) Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme 600 et de raison 0,88 :

$$b_n = 600 \times 0,88^n.$$

c) À la calculatrice,

$$b_5 = 600 \times 0,88^5 \approx 316,64,$$

$$b_6 = 600 \times 0,88^6 \approx 278,64.$$

La quantité est exprimée en unités d'énergie.

d) On compare les termes autour de 300 :

$$b_5 \approx 316,64 > 300, \quad b_6 \approx 278,64 < 300.$$

La suite est décroissante car $0 < 0,88 < 1$ et $b_0 > 0$. Le premier cycle où la quantité devient strictement inférieure à 300 est donc le cycle 6. La vérification de b_5 montre qu'elle n'était pas encore strictement inférieure au cycle précédent.

Correction 4 – Reconnaître une suite à partir de ses termes

a) Pour (a_n) , les différences sont

$$8 - 5 = 3, \quad 11 - 8 = 3, \quad 14 - 11 = 3, \quad 17 - 14 = 3.$$

Elles sont constantes. Les rapports ne sont pas nécessaires ; par exemple $8/5 \neq 11/8$.

Pour (b_n) , les différences ne sont pas constantes, mais les rapports sont

$$\frac{6}{2} = 3, \quad \frac{18}{6} = 3, \quad \frac{54}{18} = 3, \quad \frac{162}{54} = 3.$$

Pour (c_n) , les différences valent 1, 2, 3, 4 : elles ne sont pas constantes. Les rapports valent notamment 2, 2, 7/4 : ils ne sont pas constants non plus.

b) (a_n) est arithmétique de raison 3. (b_n) est géométrique de raison 3. La suite (c_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

c) Pour (a_n) , le premier terme est $a_0 = 5$, donc

$$a_n = 5 + 3n.$$

Pour (b_n) , le premier terme est $b_0 = 2$, donc

$$b_n = 2 \times 3^n.$$

d) Une liste de quelques termes permet de conjecturer un modèle, mais la troisième liste ne vérifie ni le critère des différences constantes ni celui des rapports constants. Elle n'est donc ni arithmétique ni géométrique.

4 Corrections des exercices 5 et 6 : récurrence et convergence

Correction 5 – Récurrence : rester dans un intervalle

a) On applique la relation :

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{1}{2} \times 2 + 3 = 4, \\u_2 &= \frac{1}{2} \times 4 + 3 = 5, \\u_3 &= \frac{1}{2} \times 5 + 3 = 5,5.\end{aligned}$$

b) Posons $P(n) : 2 \leq u_n < 6$.

Initialisation. $u_0 = 2$, donc $2 \leq u_0 < 6$. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons que $2 \leq u_k < 6$. Comme $1/2 > 0$,

$$1 \leq \frac{1}{2}u_k < 3.$$

En ajoutant 3,

$$4 \leq \frac{1}{2}u_k + 3 < 6.$$

Or $u_{k+1} = \frac{1}{2}u_k + 3$. Donc

$$2 \leq u_{k+1} < 6.$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion. Par récurrence, $2 \leq u_n < 6$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c)

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}u_n + 3 - u_n \\&= 3 - \frac{1}{2}u_n.\end{aligned}$$

Comme $u_n < 6$, on a $\frac{1}{2}u_n < 3$, donc $3 - \frac{1}{2}u_n > 0$. La suite est strictement croissante.

d) La suite est croissante et majorée par 6. Elle converge donc vers un réel ℓ . En passant à la limite dans la relation affine,

$$\ell = \frac{1}{2}\ell + 3.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2}\ell = 3 \iff \boxed{\ell = 6}.$$

La suite se rapproche de 6 par valeurs inférieures.

Correction 6 – Suite récurrente et point fixe

a)

$$\begin{aligned}v_1 &= \frac{0+4}{2} = 2, \\v_2 &= \frac{2+4}{2} = 3, \\v_3 &= \frac{3+4}{2} = 3,5.\end{aligned}$$

b) Posons $P(n) : 0 \leq v_n \leq 4$.

Au rang 0, $v_0 = 0$, donc $0 \leq v_0 \leq 4$.

Supposons $0 \leq v_k \leq 4$. En ajoutant 4, puis en divisant par le nombre positif 2, on obtient

$$2 \leq \frac{v_k + 4}{2} \leq 4.$$

Comme $v_{k+1} = \frac{v_k + 4}{2}$, on a en particulier $0 \leq v_{k+1} \leq 4$. La propriété est héréditaire.

Par récurrence, $0 \leq v_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c)

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{v_n + 4}{2} - v_n \\ &= \frac{4 - v_n}{2}. \end{aligned}$$

La borne $v_n \leq 4$ donne $4 - v_n \geq 0$, donc la différence est positive ou nulle. La suite est croissante. Elle est strictement croissante tant que $v_n < 4$. Ici, aucun terme n'est égal à 4 : si $v_n < 4$, alors $v_{n+1} = (v_n + 4)/2 < 4$, et c'est vrai au départ.

d) La suite est croissante et majorée par 4, donc elle converge. Si ℓ désigne sa limite,

$$\ell = \frac{\ell + 4}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2\ell = \ell + 4 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\ell = 4}.$$

5 Corrections des exercices 7 et 8 : limites

Correction 7 – Limites directes

a) Comme $n \rightarrow +\infty$,

$$u_n = 3n - 7 \longrightarrow +\infty.$$

b) Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc

$$v_n = \frac{5}{n+1} \longrightarrow 0.$$

c) Comme $-1 < 0,7 < 1$, $0,7^n \rightarrow 0$. Ainsi

$$w_n = 2 \times 0,7^n \longrightarrow 0.$$

d) Comme $1,1 > 1$, $1,1^n \rightarrow +\infty$. La multiplication par -4 inverse le sens :

$$x_n = -4 \times 1,1^n \longrightarrow -\infty.$$

e) Les termes de $(-1)^n$ valent alternativement $1, -1, 1, -1$. Ils ne se rapprochent pas d'un même réel et ne dépassent pas définitivement un seuil positif ou négatif. La suite n'a donc pas de limite.

f) On fait apparaître $n - 2$ au dénominateur :

$$4n + 1 = 4(n - 2) + 9.$$

Donc

$$z_n = 4 + \frac{9}{n-2}.$$

Pour les grands rangs, $9/(n-2) \rightarrow 0$, d'où

$$\boxed{z_n \longrightarrow 4}.$$

Correction 8 – Théorème des gendarmes

On sait que $-1 \leq (-1)^n \leq 1$. Comme $n+2 > 0$, on peut diviser sans changer le sens des inégalités :

$$-\frac{1}{n+2} \leq \frac{(-1)^n}{n+2} \leq \frac{1}{n+2}.$$

Les deux bornes tendent vers 0, car leur dénominateur tend vers $+\infty$. Le terme central est donc coincé entre deux suites de même limite. Par le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}.$$

6 Corrections des exercices 9 et 10 : modélisation et synthèse

Correction 9 – Un seuil de population

a) Une hausse de 6 % correspond au facteur $1 + 0,06 = 1,06$. Ainsi,

$$P_0 = 50, \quad P_{n+1} = 1,06P_n.$$

La suite est géométrique, donc

$$P_n = 50 \times 1,06^n.$$

b) Un algorithme possible est :

```
P = 50
n = 0
while P < 100:
    P = 1.06 * P
    n = n + 1
print(n, P)
```

La boucle continue tant que le seuil n'est pas atteint. À chaque passage, le terme est multiplié par 1,06 et le rang augmente de 1.

c) Les valeurs autour du seuil sont

$$P_{11} = 50 \times 1,06^{11} \approx 94,91 < 100, \quad P_{12} = 50 \times 1,06^{12} \approx 100,61 \geq 100.$$

Le premier rang qui vérifie la condition est donc $n = 12$.

d) La population atteint au moins 100 milliers de bactéries après 12 mois. Le contrôle de P_{11} garantit qu'elle n'avait pas encore atteint ce seuil au mois précédent.

Correction 10 – Synthèse : un réservoir qui se vide

a) Après une perte de 15 %, il reste 85 % du volume, soit $0,85V_n$. Après l'ajout de 40 litres,

$$V_0 = 800, \quad V_{n+1} = 0,85V_n + 40.$$

Les premiers termes sont

$$V_1 = 0,85 \times 800 + 40 = 680 + 40 = 720 \text{ L},$$

$$V_2 = 0,85 \times 720 + 40 = 612 + 40 = 652 \text{ L}.$$

b) Posons $P(n) : V_n \geq 800/3$.

Au rang 0, $V_0 = 800 \geq 800/3$.

Supposons $V_k \geq 800/3$. Comme $0,85 > 0$,

$$0,85V_k \geq 0,85 \times \frac{800}{3} = \frac{680}{3}.$$

En ajoutant $40 = 120/3$,

$$V_{k+1} = 0,85V_k + 40 \geq \frac{680}{3} + \frac{120}{3} = \frac{800}{3}.$$

La propriété est héréditaire. Par récurrence,

$$V_n \geq \frac{800}{3} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

c) Calculons la différence :

$$\begin{aligned}V_{n+1} - V_n &= 0,85V_n + 40 - V_n \\ &= 40 - 0,15V_n.\end{aligned}$$

La question b) donne $V_n \geq 800/3$. Or

$$0,15 \times \frac{800}{3} = \frac{15}{100} \times \frac{800}{3} = 40.$$

Donc $0,15V_n \geq 40$, puis

$$V_{n+1} - V_n \leq 0.$$

La suite est décroissante.

d) Elle est décroissante et minorée par $800/3$. Le théorème des suites monotones et bornées assure donc sa convergence.

e) Notons ℓ sa limite. La relation de récurrence est affine, donc on peut passer à la limite :

$$\begin{aligned}\ell &= 0,85\ell + 40 \\ 0,15\ell &= 40 \\ \ell &= \frac{40}{0,15} = \frac{800}{3} \approx 266,67.\end{aligned}$$

À long terme, le volume se rapproche donc d'environ 266,67 litres. Le réservoir ne se vide pas complètement dans ce modèle : la perte quotidienne diminue avec le volume, tandis que l'ajout de 40 litres reste constant.

7 Rappel différé : réponses expliquées

Correction R1

La relation $u_{n+1} = u_n - 2$ décrit une suite arithmétique de raison $r = -2$. Le terme général est

$$u_n = u_0 + nr = 7 - 2n.$$

Ainsi,

$$u_5 = 7 - 2 \times 5 = 7 - 10 = -3.$$

Correction R2

Les rapports sont constants :

$$\frac{12}{3} = 4, \quad \frac{48}{12} = 4, \quad \frac{192}{48} = 4.$$

La suite est géométrique de raison 4. La somme de ses quatre premiers termes vaut

$$3 + 12 + 48 + 192 = 255.$$

Avec la formule,

$$3 \times \frac{1 - 4^4}{1 - 4} = 3 \times \frac{1 - 256}{-3} = 255.$$

Correction R3

Comme $-1 < 0,6 < 1$,

$$0,6^n \longrightarrow 0, \quad 5 \times 0,6^n \longrightarrow 0.$$

La suite $(-1)^n$ alterne entre 1 et -1 . Elle ne se rapproche pas d'une valeur unique : elle n'a pas de limite.

Correction R4

Vérifier trois cas montre seulement que la propriété est vraie pour trois rangs. Une preuve par récurrence doit, en plus, montrer que si la propriété est vraie à un rang quelconque k , alors elle reste vraie au rang suivant $k + 1$, puis conclure pour tous les rangs.

Point de méthode

Une correction utile ne se limite pas au résultat : elle identifie la donnée, nomme la méthode, montre les transformations et contrôle le sens du résultat. Si ta méthode est différente mais justifiée, elle peut être correcte.