

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Suites numériques

Décrire et comprendre des évolutions par étapes

Un cours progressif avec exercices et indices

Objectifs

- Lire et écrire une suite définie par une formule, une relation de récurrence, un tableau ou un algorithme.
- Reconnaître, étudier et modéliser une suite arithmétique ou géométrique.
- Utiliser une somme, un sens de variation ou un raisonnement par récurrence pour justifier une réponse.
- Conjecturer puis déterminer la limite d'une suite dans des situations simples et rechercher un seuil.

Cadre du cours. Ce fascicule réunit les rappels structurants de première et les approfondissements de terminale autour des suites. Pour une élève qui prépare la session 2027, le programme de référence de la terminale est celui du Bulletin officiel spécial n° 8 du 25 juillet 2019. Il comprend notamment le raisonnement par récurrence, les limites de suites, les comparaisons et le comportement des suites géométriques. Le programme publié au Bulletin officiel n° 14 du 2 avril 2026 s'appliquera à la terminale à partir de la rentrée 2027–2028 ; il est signalé ici pour éviter une confusion entre les deux textes. Les exercices de ce fascicule sont créés pour l'apprentissage et ne sont pas des sujets officiels.

Les textes de référence sont consultables sur les sites du ministère : programme de terminale du 25 juillet 2019 et nouveau programme publié le 2 avril 2026.

Organisation conseillée. Prévoir cinq séances de 35 à 45 minutes, avec une pause courte si nécessaire :

1. diagnostic, vocabulaire et calcul des termes ;
2. suites arithmétiques, géométriques et sommes ;
3. variations et raisonnement par récurrence ;
4. limites, comparaison et suites récurrentes ;
5. modélisation, algorithme de seuil et exercice de synthèse.

Les exercices se trouvent dans ce fascicule avec leurs indices. Les corrections détaillées sont dans le fascicule séparé **corrections.pdf**. Essaie d'abord seule, consulte l'indice si nécessaire, puis seulement la correction.

Table des matières

1	Avant de commencer : diagnostic et rappels	3
2	1. Comprendre une suite	4
3	2. Suites arithmétiques : un ajout constant	6
4	3. Suites géométriques : un facteur constant	8
5	4. Variations et représentations	10
6	5. Démontrer par récurrence	12
7	6. Limites de suites	14
8	7. Modéliser et rechercher un seuil	17
9	Exercices gradués	19
10	Bilan et rappel différé	22

1 Avant de commencer : diagnostic et rappels

Durée indicative : 12 à 15 minutes, sans note et sans calculatrice. Ce diagnostic sert à repérer les gestes à reprendre, pas à attribuer une note. Si une question bloque, écrire simplement « à revoir » et continuer. Les réponses sont dans le fascicule séparé des corrections.

D1. Calculer en respectant les priorités opératoires : $7 - 2 \times 3$.

D2. Calculer et simplifier : $\frac{3}{4} - \frac{1}{8}$.

D3. Calculer $(-2)^3$ et 10^2 . Que devient le signe quand on élève un nombre négatif à une puissance impaire ?

D4. Résoudre l'équation $3x + 5 = 20$.

D5. Un prix de 80 euros augmente de 15 %. Quel est le coefficient multiplicateur et quel est le nouveau prix ?

D6. On définit $u_n = 3n - 2$, pour $n \in \mathbb{N}$. Calculer u_0 et u_4 .

D7. On définit $v_0 = 5$ et $v_{n+1} = v_n - 2$. Calculer v_1, v_2, v_3 .

D8. Pour chaque liste, les différences entre termes consécutifs sont-elles constantes ? Les rapports le sont-ils ?

4, 7, 10, 13 et 3, 6, 12, 24.

1.1 Les prérequis indispensables

Priorités opératoires. On effectue d'abord les parenthèses, puis les puissances, les multiplications et divisions, et enfin les additions et soustractions. À priorité égale, on lit de gauche à droite :

$$7 - 2 \times 3 = 7 - 6 = 1.$$

Fractions. Pour additionner ou soustraire, on utilise un même dénominateur :

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}.$$

Pourcentage. Une hausse de $t\%$ correspond au coefficient $1 + \frac{t}{100}$. Une baisse de $t\%$ correspond au coefficient $1 - \frac{t}{100}$. Ainsi, une hausse de 15 % multiplie par 1,15 :

$$80 \times 1,15 = 92.$$

Nombres naturels et rangs. Dans ce cours, on prend $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Le nombre n est le **rang** et u_n est le terme de rang n . Certains énoncés commencent à $n = 1$; il faut alors respecter l'indexation donnée.

À retenir

Avant de calculer un terme, repérer son rang et la façon dont la suite est définie. Une formule comme $u_n = 3n - 2$ se calcule directement ; une relation comme $u_{n+1} = u_n - 2$ demande de connaître le terme précédent.

2 1. Comprendre une suite

2.1 L'idée essentielle : une évolution par étapes

Une suite sert à décrire une quantité observée à des instants séparés : le nombre de personnes inscrites chaque mois, le capital à la fin de chaque année, ou le nombre de cases d'une figure quand on ajoute une étape. Les instants sont numérotés par des nombres naturels. On étudie donc une évolution **discrète**, faite de valeurs isolées, et non toutes les valeurs intermédiaires.

Par exemple, si une cagnotte contient 20 euros au départ et reçoit 5 euros chaque semaine, on peut noter u_n la somme après n semaines :

$$u_0 = 20, \quad u_1 = 25, \quad u_2 = 30, \quad u_3 = 35.$$

La suite donne une valeur pour chaque rang.

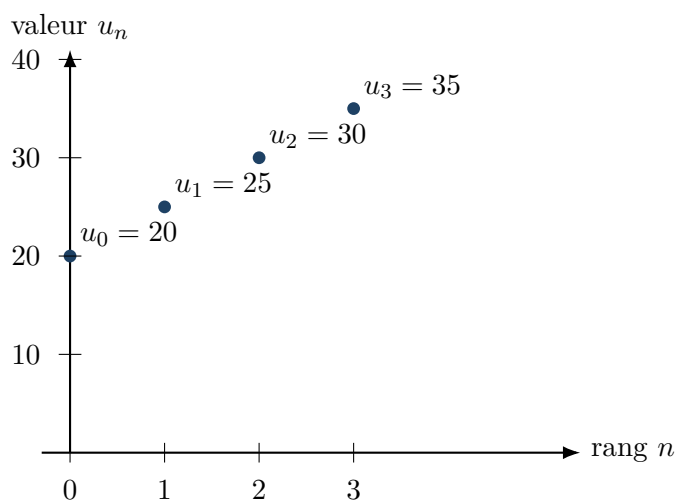


FIGURE 1 – La représentation graphique d'une suite est un nuage de points (n, u_n) . On ne relie pas les points : les rangs sont discrets.

2.2 Deux façons principales de définir une suite

Définition explicite. Une formule donne directement le terme de rang n :

$$u_n = f(n).$$

Pour calculer u_6 , on remplace immédiatement n par 6.

Définition par récurrence. On donne un premier terme et une règle qui permet de passer d'un terme au suivant :

$$u_0 = \text{valeur initiale}, \quad u_{n+1} = g(u_n).$$

Pour calculer u_4 , on calcule successivement u_1 , puis u_2 , puis u_3 , puis u_4 . La relation de récurrence ne donne pas directement le terme demandé sans les termes précédents.

Exemple entièrement détaillé

On considère la suite définie explicitement par

$$u_n = 3n - 2.$$

Pour le terme de rang 0, on remplace n par 0 :

$$u_0 = 3 \times 0 - 2 = -2.$$

Pour le terme de rang 3, on remplace n par 3 :

$$u_3 = 3 \times 3 - 2 = 9 - 2 = 7.$$

Cherchons le rang du terme égal à 16. On traduit la question par $u_n = 16$, puis on remplace u_n par sa formule :

$$\begin{aligned} u_n = 16 &\iff 3n - 2 = 16 \\ &\iff 3n = 18 \\ &\iff n = 6. \end{aligned}$$

Comme $6 \in \mathbb{N}$, le terme u_6 est bien défini et vaut 16.

Exemple entièrement détaillé

On considère maintenant

$$v_0 = 2, \quad v_{n+1} = v_n + 3.$$

On applique la règle une fois par ligne :

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 + 3 = 2 + 3 = 5, \\ v_2 &= v_1 + 3 = 5 + 3 = 8, \\ v_3 &= v_2 + 3 = 8 + 3 = 11. \end{aligned}$$

La relation permet de calculer les termes, mais il faut avancer rang après rang. Plus loin, nous verrons que cette suite possède aussi une formule explicite, $v_n = 2 + 3n$.

Méthode

Pour calculer un terme :

1. écrire le rang demandé ;
2. vérifier si l'on dispose d'une formule explicite ou d'une relation de récurrence ;
3. remplacer le rang dans la formule, ou calculer les termes intermédiaires dans l'ordre ;
4. contrôler le résultat avec le sens de l'évolution : une hausse ne doit pas produire une valeur plus petite sans raison.

À retenir

Une suite est une liste ordonnée $u_0, u_1, u_2, \dots$. La notation u_n désigne un terme ; la notation $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne la suite entière. Une formule explicite donne directement un terme, tandis qu'une récurrence permet de construire le terme suivant à partir du précédent.

3 2. Suites arithmétiques : un ajout constant

3.1 Reconnaître une évolution arithmétique

Une quantité évolue de façon arithmétique lorsqu'elle reçoit toujours le même ajout, appelé la **raison** et noté r . La définition est

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

La différence entre deux termes consécutifs est donc constante :

$$u_{n+1} - u_n = r.$$

Un salaire qui augmente de 40 euros chaque mois, ou une figure à laquelle on ajoute toujours 6 carreaux, sont des exemples de croissance arithmétique.

3.2 Terme général

Si la suite commence par u_0 , alors

$$u_n = u_0 + nr.$$

Plus généralement, si l'on connaît le terme u_p , alors

$$u_n = u_p + (n - p)r \quad \text{pour } n \geq p.$$

On ajoute la raison autant de fois qu'il y a de passages du rang p au rang n .

Exemple entièrement détaillé

On considère une suite arithmétique telle que $u_0 = 12$ et $r = 5$. Les premiers termes permettent de comprendre la formule :

$$u_1 = 12 + 5, u_2 = 12 + 5 + 5, u_3 = 12 + 5 + 5 + 5.$$

Au rang n , on a ajouté 5 exactement n fois :

$$u_n = 12 + 5n.$$

Par exemple,

$$u_7 = 12 + 5 \times 7 = 12 + 35 = 47.$$

La formule est contrôlée par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 12 + 5(n + 1) = 12 + 5n + 5 = u_n + 5.$$

3.3 Sens de variation

La raison suffit à déterminer le sens de variation :

Condition sur r	Évolution de (u_n)
$r > 0$	strictement croissante
$r = 0$	constante
$r < 0$	strictement décroissante

En effet, $u_{n+1} - u_n = r$. Le signe de cette différence dit si l'on monte, si l'on reste au même niveau ou si l'on descend.

3.4 Somme des termes

Pour une suite arithmétique, la somme des termes de u_p à u_n est

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \frac{(n - p + 1)(u_p + u_n)}{2}.$$

Il y a $n - p + 1$ termes. On multiplie leur nombre par la moyenne du premier et du dernier.

Exemple entièrement détaillé

Une association reçoit 120 euros le premier mois, puis 15 euros de plus chaque mois. On note u_n la recette du mois de rang n , avec le premier mois au rang 0. Ainsi, $u_0 = 120$ et $r = 15$.

La recette du sixième mois, de rang 5, vaut

$$u_5 = 120 + 5 \times 15 = 120 + 75 = 195 \text{ euros.}$$

La recette totale des six premiers mois est

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + \cdots + u_5 \\ &= \frac{(5 - 0 + 1)(u_0 + u_5)}{2} \\ &= \frac{6(120 + 195)}{2} \\ &= 3 \times 315 = 945 \text{ euros.} \end{aligned}$$

On vérifie l'unité : on a additionné des recettes en euros, donc le résultat est en euros.

3.5 Démonstration de la formule de somme

Posons

$$S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n.$$

En écrivant la même somme dans l'autre ordre,

$$S = u_n + u_{n-1} + \cdots + u_p.$$

En additionnant membre à membre, chaque colonne vaut $u_p + u_n$:

$$2S = (n - p + 1)(u_p + u_n).$$

En divisant par 2, on obtient la formule annoncée. Le cas particulier $1 + 2 + \cdots + n$ correspond à $p = 1$, $u_p = 1$, $u_n = n$:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

À retenir

Suite arithmétique signifie « même ajout à chaque étape » : $u_{n+1} = u_n + r$, puis $u_n = u_0 + nr$.
 Pour une somme, compter les termes avant d'appliquer $\frac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier} + \text{dernier})}{2}$.

4 3. Suites géométriques : un facteur constant

4.1 Reconnaître une évolution géométrique

Une quantité évolue de façon géométrique lorsqu'elle est multipliée toujours par le même nombre, appelé la **raison** et noté q . La définition est

$$u_{n+1} = q u_n.$$

Lorsque les termes à comparer sont non nuls, cela revient à dire

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q.$$

La relation de récurrence reste la définition la plus sûre, notamment lorsqu'un terme vaut zéro.

Une hausse de $t\%$ est une multiplication par $1 + \frac{t}{100}$; une baisse de $t\%$ est une multiplication par $1 - \frac{t}{100}$. Une évolution à pourcentage constant est donc modélisée par une suite géométrique.

4.2 Terme général

Si la suite commence par u_0 , alors

$$u_n = u_0 q^n.$$

Plus généralement,

$$u_n = u_p q^{n-p} \quad \text{pour } n \geq p.$$

L'exposant compte le nombre de multiplications effectuées.

Exemple entièrement détaillé

Un capital de 800 euros augmente de 4% chaque année. On note C_n le capital après n années.

Le coefficient multiplicateur est

$$q = 1 + \frac{4}{100} = 1,04.$$

La situation se traduit par

$$C_0 = 800, \quad C_{n+1} = 1,04 C_n.$$

Il s'agit d'une suite géométrique, donc

$$C_n = 800 \times 1,04^n.$$

Après trois ans,

$$\begin{aligned} C_3 &= 800 \times 1,04^3 \\ &= 800 \times 1,124864 \\ &= 899,8912 \text{ euros.} \end{aligned}$$

En pratique, on peut annoncer environ 899,89 euros si l'on arrondit au centime. Il ne faut pas remplacer une hausse de 4% par un ajout fixe de 4 euros : le pourcentage s'applique au capital présent à chaque étape.

4.3 Sens de variation dans le cas usuel

Lorsque $u_0 > 0$ et $q > 0$, on obtient :

Condition sur q	Évolution de (u_n)
$q > 1$	strictement croissante
$q = 1$	constante
$0 < q < 1$	strictement décroissante

Pour une raison négative, les termes changent généralement de signe à chaque étape : il faut alors étudier les termes un par un et ne pas appliquer ce tableau. Par exemple, $(-2)^n$ alterne entre des valeurs positives et négatives.

4.4 Somme des termes

Pour $q \neq 1$,

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Ainsi, pour une suite géométrique de premier terme u_0 ,

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Si $q = 1$, tous les termes valent u_0 , donc la somme vaut $(n + 1)u_0$.

Exemple entièrement détaillé

Calculons

$$S = 3 + 6 + 12 + 24 + 48.$$

Le premier terme est 3, la raison est 2, et le dernier rang est 4. Il y a donc cinq termes :

$$\begin{aligned} S &= 3 \times \frac{1 - 2^5}{1 - 2} \\ &= 3 \times \frac{1 - 32}{-1} \\ &= 3 \times 31 = 93. \end{aligned}$$

Le calcul direct $3 + 6 + 12 + 24 + 48 = 93$ confirme le résultat.

4.5 Démonstration de la formule de somme

Posons

$$S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n.$$

En multipliant par q ,

$$qS = q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1}.$$

En soustrayant, les termes intermédiaires s'annulent :

$$\begin{aligned} S - qS &= 1 - q^{n+1}, \\ (1 - q)S &= 1 - q^{n+1}. \end{aligned}$$

Comme $q \neq 1$, on peut diviser par $1 - q$, ce qui donne la formule.

À retenir

Suite géométrique signifie « même facteur à chaque étape » : $u_{n+1} = qu_n$, puis $u_n = u_0q^n$. Pour un pourcentage constant, le coefficient est $1+t/100$ en cas de hausse et $1-t/100$ en cas de baisse. La formule de somme exige de distinguer le cas $q = 1$.

5 4. Variations et représentations

5.1 Comparer deux termes consécutifs

Pour savoir si une suite est croissante ou décroissante, on compare u_{n+1} et u_n . Le calcul le plus général consiste à étudier

$$u_{n+1} - u_n.$$

- Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout n , la suite est croissante.
- Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout n , la suite est décroissante.
- Si le signe change, on ne peut pas conclure à une variation monotone avec cette comparaison.

Pour une suite à termes strictement positifs, on peut aussi comparer le rapport u_{n+1}/u_n à 1 : un rapport supérieur à 1 signifie une hausse, un rapport entre 0 et 1 une baisse. Cette méthode dépend de la positivité ; avec des signes négatifs, elle peut être trompeuse.

Exemple entièrement détaillé

On considère

$$w_n = \frac{6}{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pour comparer deux termes consécutifs, on calcule leur différence :

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{6}{n+3} - \frac{6}{n+2} \\ &= \frac{6(n+2) - 6(n+3)}{(n+3)(n+2)} \\ &= \frac{-6}{(n+3)(n+2)}. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le dénominateur est positif et le numérateur est négatif. La différence est donc négative : la suite (w_n) est strictement décroissante.

5.2 Lire un tableau et un graphique

Un tableau de valeurs associe chaque rang à son terme :

n	0	1	2	3	4
u_n	2	5	8	11	14

Les différences valent toutes 3 : les valeurs suggèrent une suite arithmétique de raison 3. Une liste de termes permet de faire une **conjecture**, mais une justification générale est nécessaire pour affirmer qu'une suite est arithmétique ou géométrique.

La représentation graphique d'une suite est le nuage de points (n, u_n) . Il faut lire les deux axes, leurs graduations et leurs unités. Une suite arithmétique donne des points alignés sur une droite, mais l'inverse doit être interprété avec précaution : seuls les rangs naturels sont concernés.

5.3 Suite arithmétique ou géométrique ?

Pour choisir le modèle, traduire la phrase de l'énoncé :

Phrase ou situation	Modèle
« on ajoute r à chaque étape » ; accroissement absolu constant	suite arithmétique : $u_{n+1} = u_n + r$
« on multiplie par q » ; taux d'évolution constant	suite géométrique : $u_{n+1} = qu_n$
« le terme suivant dépend d'une autre règle »	suite définie par récurrence générale : calculer ou étudier la règle

Attention au vocabulaire. Ajouter 5 à chaque étape et augmenter de 5 % à chaque étape ne décrivent pas la même évolution. Dans le premier cas, l'écart est constant ; dans le second, le facteur est constant.

À retenir

Pour une variation, comparer $u_{n+1} - u_n$. Pour reconnaître un modèle, chercher d'abord « même ajout » ou « même facteur ». Un tableau ou un graphique aide à conjecturer, mais une preuve porte sur tous les rangs.

6 5. Démontrer par récurrence

6.1 Pourquoi une preuve par récurrence ?

Une affirmation peut être vraie pour les premiers rangs sans être vraie pour tous les rangs. Le raisonnement par récurrence permet de vérifier une propriété à chaque étape, comme une rangée de dominos :

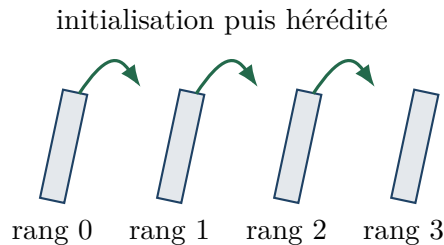


FIGURE 2 – La récurrence : une première étape et un passage valable d'un rang au suivant.

Pour prouver une propriété $P(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit trois parties :

1. **Initialisation** : vérifier $P(0)$ (ou le premier rang de l'énoncé).
2. **Hérédité** : supposer $P(k)$ vraie pour un rang k , puis démontrer $P(k+1)$.
3. **Conclusion** : la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'hypothèse « $P(k)$ est vraie » n'est utilisée que pendant l'étape d'hérédité. Il faut la citer explicitement.

Exemple entièrement détaillé

On définit

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$$

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 \leq u_n < 2.$$

Initialisation. Pour $n = 0$, on sait que $u_0 = 1$. Donc

$$1 \leq u_0 < 2.$$

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Supposons qu'à un rang k , on ait $1 \leq u_k < 2$. Comme on multiplie une inégalité par le nombre positif $1/2$,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}u_k < 1.$$

En ajoutant 1 aux trois membres,

$$\frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}u_k + 1 < 2.$$

Or $u_{k+1} = \frac{1}{2}u_k + 1$, donc

$$1 \leq u_{k+1} < 2.$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion. Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n < 2$.

Cette propriété permet ensuite d'étudier les variations :

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n \\ &= 1 - \frac{1}{2}u_n.\end{aligned}$$

Comme $u_n < 2$, on a $1 - \frac{1}{2}u_n > 0$. La suite est donc strictement croissante. Elle est croissante et majorée par 2, donc elle converge. Si sa limite est ℓ , la relation de récurrence donne

$$\ell = \frac{1}{2}\ell + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\ell = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \ell = 2.$$

La suite converge donc vers 2.

Méthode

Pour une suite récurrente, une preuve de majoration ou de minoration suit souvent ce plan : partir de l'encadrement supposé pour u_k , appliquer la formule de récurrence, puis vérifier que le même encadrement est obtenu pour u_{k+1} . Ne pas remplacer l'hérédité par la seule vérification de quelques termes.

À retenir

Une récurrence complète comporte : initialisation, hérédité, conclusion. Pour étudier une suite définie par récurrence, on cherche souvent un intervalle dans lequel elle reste, puis on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

7 6. Limites de suites

7.1 Comprendre l'idée de limite

La limite décrit le comportement des termes quand le rang devient très grand. Dire que u_n tend vers ℓ signifie que les termes finissent par être arbitrairement proches de ℓ . Ils n'ont pas besoin d'être égaux à ℓ , ni même de l'atteindre.

Par exemple, $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ donne

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0,5, \quad u_2 \approx 0,667, \quad u_{10} \approx 0,909.$$

Les valeurs se rapprochent de 1 : on écrit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

On distingue trois comportements fréquents :

- convergence vers un réel ℓ ;
- divergence vers $+\infty$ ou vers $-\infty$;
- absence de limite, par exemple lorsque les termes oscillent sans se rapprocher d'une même valeur.

7.2 Limites usuelles

Quelques résultats à connaître :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Pour une puissance géométrique, le comportement dépend de q :

Condition sur q	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$
$q > 1$	$+\infty$
$q = 1$	1
$-1 < q < 1$	0
$q = -1$	pas de limite
$q < -1$	pas de limite

Dans le dernier cas, les valeurs absolues deviennent très grandes mais les signes alternent. Ce n'est ni une limite vers $+\infty$, ni une limite vers $-\infty$.

Par multiplication par une constante, on en déduit par exemple :

$$\lim 5 \times 0,8^n = 0, \quad \lim(-3) \times 1,2^n = -\infty.$$

7.3 Opérations sur les limites

Si $u_n \rightarrow \ell$ et $v_n \rightarrow m$, alors, dans les cas où l'opération a un sens,

$$u_n + v_n \rightarrow \ell + m, \quad u_n - v_n \rightarrow \ell - m, \quad u_n v_n \rightarrow \ell m.$$

Si $m \neq 0$, alors

$$\frac{u_n}{v_n} \rightarrow \frac{\ell}{m}.$$

Les expressions comme $+\infty - \infty$ ou $0 \times (+\infty)$ ne donnent pas une conclusion immédiate : il faut transformer l'expression ou utiliser une comparaison.

Exemple entièrement détaillé

Calculons la limite de

$$u_n = \frac{4n - 1}{2n + 3}.$$

On fait apparaître le terme dominant :

$$4n - 1 = 2(2n + 3) - 7.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{2(2n + 3) - 7}{2n + 3} = 2 - \frac{7}{2n + 3}.$$

Comme $2n + 3 \rightarrow +\infty$, on a $\frac{7}{2n + 3} \rightarrow 0$. Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.}$$

Le résultat est cohérent : pour de grandes valeurs de n , le quotient des termes dominants $4n$ et $2n$ vaut 2.

7.4 Théorème des gendarmes

Si, à partir d'un certain rang,

$$a_n \leq u_n \leq b_n$$

et si a_n et b_n tendent vers le même réel ℓ , alors

$$\boxed{u_n \longrightarrow \ell.}$$

La suite u_n est « coincée » entre deux suites qui se rapprochent de la même valeur.

Exemple entièrement détaillé

On considère

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n + 1}.$$

Comme $(-1)^n$ vaut toujours -1 ou 1 ,

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1.$$

En divisant par $n + 1 > 0$,

$$-\frac{1}{n + 1} \leq u_n \leq \frac{1}{n + 1}.$$

Les deux bornes tendent vers 0. Le théorème des gendarmes donne donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n + 1} = 0.}$$

Les signes alternent, mais l'amplitude $1/(n + 1)$ devient de plus en plus petite : l'oscillation ne suffit pas à empêcher la convergence.

7.5 Suite monotone et bornée

Un théorème important permet de conclure sans connaître immédiatement la limite :

Toute suite croissante et majorée converge.

De même, toute suite décroissante et minorée converge. Une majoration est un nombre qui reste au-dessus de tous les termes ; une minoration reste en dessous. Dans l'exemple de la section précédente, (u_n) est croissante et tous ses termes sont inférieurs à 2, donc elle converge.

Attention. Une suite croissante peut tendre vers $+\infty$ si elle n'est pas majorée, comme $u_n = n$. Une suite bornée n'est pas forcément convergente : $(-1)^n$ est bornée mais n'a pas de limite.

7.6 Chercher la limite d'une suite récurrente

Pour une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut suivre ce plan :

1. prouver que la suite reste dans un intervalle adapté ;
2. prouver qu'elle est croissante ou décroissante ;
3. utiliser le théorème des suites monotones et bornées ;
4. appeler ℓ la limite et remplacer u_n et u_{n+1} par ℓ dans la relation, lorsque cette opération est justifiée.

L'équation obtenue donne une **valeur candidate**. Les étapes précédentes restent indispensables : résoudre seulement $\ell = f(\ell)$ ne prouve pas que la suite converge.

À retenir

Pour une limite, identifier d'abord la forme de la suite. Utiliser les limites usuelles, les opérations, un encadrement ou le théorème des gendarmes. Pour une suite récurrente, établir d'abord variation et bornes ; l'équation sur la limite vient ensuite. Une suite bornée n'est pas automatiquement convergente.

8 7. Modéliser et rechercher un seuil

8.1 Passer d'un énoncé à une suite

Pour modéliser une évolution, on nomme précisément la quantité et son unité. On peut suivre quatre étapes :

1. définir u_n : que représente-t-il et à quel rang correspond $n = 0$?
2. traduire l'évolution d'une étape à la suivante ;
3. choisir une relation explicite ou une relation de récurrence ;
4. contrôler le premier passage avec les données de l'énoncé.

Exemple entièrement détaillé

Un compte contient 1000 euros. Il augmente de 2 % par mois. On note C_n le solde après n mois. Le coefficient multiplicateur est 1,02, donc

$$C_0 = 1000, \quad C_{n+1} = 1,02C_n, \text{ et } C_n = 1000 \times 1,02^n.$$

Cherchons le premier mois où le solde atteint au moins 1200 euros. La question se traduit par

$$C_n \geq 1200.$$

Un algorithme peut calculer les termes jusqu'à ce seuil :

```
capital = 1000
n = 0
while capital < 1200:
    capital = 1.02 * capital
    n = n + 1
print(n, capital)
```

La boucle s'arrête au premier rang où la condition $capital < 1200$ devient fausse. Avec une calculatrice,

$$C_9 \approx 1195,09 < 1200, \quad C_{10} \approx 1218,99 \geq 1200.$$

Le premier rang recherché est donc $n = 10$: le seuil est atteint après dix mois. Le contrôle de C_9 est important pour justifier le mot « premier ».

8.2 Un algorithme de calcul de termes

Pour une relation de récurrence, on peut conserver uniquement le dernier terme calculé :

```
u = u0
for k in range(1, n+1):
    u = formule_de_passage(u)
print(u)
```

Il faut adapter la syntaxe à la calculatrice ou au langage utilisé. L'idée mathématique reste la même : initialiser au bon terme, répéter exactement le nombre de passages nécessaire, puis lire la valeur obtenue.

Erreur fréquente. Dans une boucle de seuil, si l'on augmente une quantité avant de tester la condition, le rang compté correspond au terme suivant. Il faut préciser ce que contient la variable avant la boucle et vérifier le terme juste avant l'arrêt.

À retenir

Une modélisation réussie relie toujours une lettre, un rang, une unité et une règle d'évolution. Pour un seuil, l'algorithme doit fournir le premier rang satisfaisant la condition et permettre de contrôler le rang précédent.

9 Exercices gradués

Les exercices sont classés du plus guidé au plus autonome. Pour chacun, indique la donnée utile, la méthode choisie et une phrase de conclusion. Les corrections détaillées se trouvent dans le fascicule séparé, avec la même numérotation.

Exercice 1 – Rang et modes de génération – 6 min

On considère la suite $u_n = 2n - 3$, pour $n \in \mathbb{N}$, et la suite $v_0 = 1$, $v_{n+1} = v_n + 4$.

- Calculer u_0 et u_4 .
- Déterminer le rang n tel que $u_n = 13$.
- Calculer v_1, v_2, v_3 .
- Préciser laquelle des deux suites est donnée explicitement et laquelle est donnée par récurrence.

Indice.

Pour la question b), remplacer u_n par $2n - 3$. Pour la suite (v_n) , appliquer la relation une fois par ligne.

Exercice 2 – Suite arithmétique : augmentation fixe – 8 min

On considère $a_0 = 18$ et $a_{n+1} = a_n + 5$.

- Justifier que (a_n) est arithmétique et donner sa raison.
- Donner l'expression de a_n en fonction de n , puis calculer a_{12} .
- Calculer $S = a_0 + a_1 + \cdots + a_{12}$.
- Indiquer le sens de variation de la suite et le justifier.

Indice.

Il y a $12 - 0 + 1$ termes dans la somme. Le dernier terme est nécessaire pour utiliser la formule de moyenne du premier et du dernier.

Exercice 3 – Suite géométrique et pourcentage – 10 min

Une batterie contient 600 unités d'énergie au rang 0. Elle perd 12 % de son énergie à chaque cycle. On note b_n la quantité après n cycles.

- Déterminer le coefficient multiplicateur et calculer b_1 et b_2 .
- Donner l'expression de b_n en fonction de n .
- Calculer b_5 et b_6 , au centième près.
- À partir de quel cycle la quantité devient-elle strictement inférieure à 300 unités ? Justifier que le cycle trouvé est le premier.

Indice.

Une perte de 12 % correspond au facteur $1 - 0,12$. Pour la dernière question, comparer deux termes consécutifs autour du seuil.

Exercice 4 – Reconnaître une suite à partir de ses termes – 8 min

On observe les listes suivantes :

n	0	1	2	3	4
a_n	5	8	11	14	17
b_n	2	6	18	54	162
c_n	1	2	4	7	11

- Pour chaque ligne, calculer les différences consécutives et, lorsque c'est possible, les rapports consécutifs.
- Identifier les suites arithmétiques et géométriques.
- Pour les deux suites identifiées, donner une formule de a_n ou b_n .
- La troisième suite est-elle arithmétique ou géométrique ? Justifier.

Indice.

Une différence constante caractérise le modèle arithmétique ; un rapport constant caractérise le modèle géométrique lorsque les divisions sont possibles.

Exercice 5 – Récurrence : rester dans un intervalle – 12 min

On définit

$$u_0 = 2, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

- Calculer les trois premiers termes après u_0 .
- Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n < 6$.
- Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ et en déduire le sens de variation.
- Justifier que la suite converge, puis déterminer sa limite.

Indice.

Pour l'hérédité, partir de $2 \leq u_k < 6$ et appliquer la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x + 3$. Pour la variation, développer $u_{n+1} - u_n$, puis utiliser la borne supérieure.

Exercice 6 – Suite récurrente et point fixe – 12 min

On définit

$$v_0 = 0, \quad v_{n+1} = \frac{v_n + 4}{2}.$$

- Calculer v_1, v_2, v_3 .
- Démontrer que $0 \leq v_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que $v_{n+1} - v_n \geq 0$, puis préciser quand cette différence est strictement positive.
- En déduire la convergence de (v_n) et calculer sa limite.

Indice.

Pour la borne, si $0 \leq v_k \leq 4$, encadrer $\frac{v_k + 4}{2}$. Pour la variation, écrire $v_{n+1} - v_n = \frac{4 - v_n}{2}$.

Exercice 7 – Limites directes – 10 min

Déterminer les limites suivantes lorsque n tend vers $+\infty$. Justifier la règle utilisée.

- a) $u_n = 3n - 7$;
- b) $v_n = \frac{5}{n+1}$;
- c) $w_n = 2 \times 0,7^n$;
- d) $x_n = -4 \times 1,1^n$;
- e) $y_n = (-1)^n$;
- f) $z_n = \frac{4n+1}{n-2}$.

Indice.

Pour f), faire apparaître le rapport des termes de plus haut degré, ou écrire le numérateur sous la forme $4(n-2) + 9$.

Exercice 8 – Théorème des gendarmes – 10 min

On considère

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+2}.$$

- a) Encadrer u_n par deux expressions simples dépendant de n .
- b) Déterminer la limite de chacune des bornes.
- c) Conclure sur la limite de (u_n) en citant le théorème utilisé.

Indice.

Commencer par $-1 \leq (-1)^n \leq 1$. Le dénominateur $n+2$ est toujours strictement positif.

Exercice 9 – Un seuil de population – 15 min

Une population de bactéries contient 50 milliers de bactéries au rang 0 et augmente de 6 % chaque mois. On note P_n l'effectif, en milliers, après n mois.

- a) Donner la relation de récurrence puis une formule explicite pour P_n .
- b) Écrire un algorithme qui détermine le premier rang n tel que $P_n \geq 100$.
- c) À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableau de valeurs, déterminer ce rang et contrôler le terme précédent.
- d) Interpréter la réponse dans le contexte.

Indice.

Le facteur de croissance est 1,06. L'algorithme doit commencer avec $P = 50$ et $n = 0$, puis augmenter le rang en même temps que la population.

Exercice 10 – Synthèse : un réservoir qui se vide – 25 min

Un réservoir contient 800 litres d'eau au jour 0. Chaque jour, il perd 15 % de son contenu puis reçoit 40 litres. On note V_n son volume, en litres, au jour n . On admet que le réservoir ne déborde pas.

- a) Traduire l'évolution par une relation de récurrence et calculer V_1 et V_2 .

- b) Montrer par récurrence que $V_n \geq \frac{800}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- c) Montrer que (V_n) est décroissante.
- d) Justifier que la suite converge et noter ℓ sa limite.
- e) En passant à la limite dans la relation de récurrence, déterminer ℓ et l'interpréter.

Indice.

Après la perte, il reste $0,85V_n$. Pour la borne, vérifier que $0,85 \times \frac{800}{3} + 40 = \frac{800}{3}$. Pour la variation, développer $V_{n+1} - V_n$ et utiliser la borne de la question b).

10 Bilan et rappel différé

10.1 Les erreurs fréquentes à surveiller

- Confondre le terme u_n et la suite entière (u_n) .
- Commencer à u_1 alors que l'énoncé donne u_0 , ou compter un mauvais nombre de termes dans une somme.
- Transformer une hausse de $t\%$ en ajout de t , au lieu d'utiliser le facteur multiplicateur.
- Utiliser une formule géométrique pour une suite arithmétique, ou l'inverse.
- Conclure à partir de quatre ou cinq termes sans démonstration générale.
- Résoudre l'équation $\ell = f(\ell)$ sans avoir prouvé que la suite converge.
- Dire qu'une suite bornée converge : l'exemple $(-1)^n$ montre que c'est faux.
- Donner un rang de seuil sans vérifier que le terme précédent ne satisfait pas encore la condition.

10.2 Auto-évaluation

Cocher une case après le travail :

Je sais...	seul(e)	avec un rappel	à reprendre
calculer un terme explicite ou récurrent			
reconnaître un ajout constant et un facteur constant			
calculer le terme général et une somme			
rédiger initialisation, hérédité et conclusion			
étudier une variation avec une différence			
choisir une méthode de limite			
traduire un seuil en algorithme et contrôler le rang précédent			

Si un exercice bloque, revenir à cette courte procédure :

1. entourer la quantité étudiée, son unité et son rang initial ;
2. écrire les trois premières valeurs ou la première relation de passage ;

3. dire avec des mots si l'évolution ajoute ou multiplie ;
4. choisir une seule méthode et écrire la première étape ;
5. consulter l'indice, puis reprendre la rédaction avec ses propres phrases.

10.3 Rappel différé – à refaire quelques jours plus tard

Ces questions sont volontairement courtes. Essaie de les résoudre sans rouvrir le cours ; les réponses expliquées sont dans le fascicule des corrections.

- R1.** On donne $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = u_n - 2$. Calculer u_5 , puis donner la formule de u_n .
- R2.** La suite 3, 12, 48, 192, ... est-elle arithmétique ou géométrique ? Donner sa raison et la somme de ses quatre premiers termes.
- R3.** Sans calculer beaucoup de termes, déterminer la limite de $5 \times 0,6^n$, puis expliquer pourquoi $(-1)^n$ n'a pas de limite.
- R4.** En une phrase, expliquer pourquoi la vérification de $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ ne constitue pas une preuve par récurrence.

À retenir

Une suite décrit une évolution par rangs. Même ajout : arithmétique. Même facteur : géométrique. Pour une récurrence : initialiser, transmettre, conclure. Pour une limite : reconnaître la forme, justifier l'outil, puis interpréter le résultat.