

Fiche d'histoire mathématique

Une suite pour raconter une évolution

De la récurrence des calculs aux modèles de croissance

Idée directrice. Une suite associe un nombre à chaque rang. Elle est donc adaptée à tout phénomène qui se déroule par étapes : une population chaque année, un capital après chaque versement ou une approximation améliorée à chaque calcul.

Table des matières

1 Compter par étapes dans les mathématiques anciennes	1
2 Fibonacci et les suites récurrentes	1
3 Sommes, croissance et séries	1
4 La récurrence comme preuve	2
5 Vers les limites et les modèles modernes	2
6 À retenir	2
7 Pour aller plus loin	2

1 Compter par étapes dans les mathématiques anciennes

Les progressions arithmétiques et géométriques apparaissent dans des problèmes de commerce, d'astronomie et de mesure bien avant la notation u_n . Une progression arithmétique ajoute toujours la même quantité ; une progression géométrique multiplie toujours par le même facteur. Ces deux modèles décrivent des situations très différentes : un salaire augmenté d'un montant fixe n'évolue pas comme un capital soumis à un même pourcentage.

Les mathématiciens écrivaient souvent les termes les uns sous les autres ou utilisaient des tableaux. La notation moderne rend explicite la règle qui relie un rang à son terme.

2 Fibonacci et les suites récurrentes

Dans le *Liber abaci*, publié en 1202, Leonardo de Pise, appelé Fibonacci, pose un problème de croissance d'une population de lapins. La suite obtenue commence par

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Le problème est fictif et ses hypothèses biologiques sont très simplifiées, mais il fait comprendre une idée essentielle : pour calculer le terme suivant, on peut avoir besoin de plusieurs termes précédents.

La suite de Fibonacci n'est pas apparue sans précurseur : des suites et des problèmes de prosodie existaient dans les mathématiques indiennes. L'histoire est donc aussi celle des transmissions entre cultures et des changements de contexte.

3 Sommes, croissance et séries

Les suites géométriques ont joué un rôle dans les calculs d'intérêts composés et dans l'étude des approximations. Au XVII^e et au XVIII^e siècle, les travaux de Pascal, Bernoulli et Euler utilisent des suites et des sommes de plus en plus longues. On apprend alors à faire la différence entre une somme finie, que l'on peut calculer exactement, et une série infinie, dont il faut étudier la convergence.

La formule de somme d'une suite géométrique vient d'un décalage : si $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$, alors

$$qS = q + q^2 + \dots + q^n, \quad S - qS = 1 - q^n.$$

La plupart des termes se compensent. Cette technique historique et très simple est encore utilisée pour les modèles financiers et les algorithmes.

4 La récurrence comme preuve

Une propriété vraie au premier rang peut se transmettre au rang suivant comme une chaîne de dominos. Blaise Pascal utilise déjà des raisonnements de ce type dans ses travaux sur le triangle arithmétique. Au XIX^e siècle, le principe est formulé plus explicitement dans le langage de l'arithmétique, notamment par Peano.

La démonstration par récurrence ne dit pas seulement que les premiers termes ont été vérifiés. Elle explique le mécanisme qui rend la propriété vraie pour tous les rangs : initialisation, hérédité, conclusion.

5 Vers les limites et les modèles modernes

L'étude des suites a conduit naturellement à la notion de limite : que devient u_n lorsque le rang augmente sans borne ? Les travaux de Newton et Leibniz sur le calcul infinitésimal, puis la rigueur de Cauchy et de Weierstrass, ont transformé cette question en outil central de l'analyse.

Aujourd'hui, les suites modélisent un calcul itératif : un algorithme produit $u_0, u_1, u_2, \dots$, et l'on cherche soit une valeur limite, soit le premier rang qui atteint une précision ou un seuil.

Repère	Idée
Antiquité et Moyen Âge	Progressions pour le commerce, l'astronomie et la poésie.
1202	Fibonacci présente une récurrence dans le <i>Liber abaci</i> .
XVII ^e –XVIII ^e siècles	Suites, sommes et intérêts composés se développent.
XIX ^e siècle à aujourd'hui	Récurrence, limites et itérations deviennent des outils généraux.

6 À retenir

Une suite est un récit numérique par étapes. La formule explicite donne directement un terme ; la récurrence décrit la manière de passer au suivant ; la limite résume le comportement lorsque les étapes se poursuivent.

7 Pour aller plus loin

- MacTutor, fiche sur la suite de Fibonacci : Fibonacci sequence.
- MacTutor, étude historique du calcul infinitésimal : The rise of calculus.
- Pour le contexte combinatoire des anciennes suites de motifs, consulter la fiche d'histoire de la combinatoire.