

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Corrections expliquées

Limites des fonctions

À consulter après une première recherche personnelle

Utilisation. Cherche d’abord dans le fascicule du cours. Lis son indice si tu es bloquée, puis compare ta démarche avec la correction complète. Une rédaction différente peut être correcte si elle respecte les données et si elle est justifiée. Les exercices sont des créations pédagogiques ; ils ne sont pas présentés comme des sujets officiels du baccalauréat.

Rappel de méthode. Avant de calculer une limite, vérifier le domaine et la direction étudiée. Essayer la substitution directe en un point. Si l’on obtient $0/0$, ∞/∞ ou $\infty - \infty$, transformer l’expression. À l’infini, repérer le terme dominant ; pour un quotient de polynômes, comparer les degrés. Une limite finie à l’infini donne une asymptote horizontale, tandis qu’une limite infinie en un point donne une asymptote verticale.

Table des matières

1	Diagnostic : réponses et rappels ciblés	3
2	Corrections des exercices 1 à 3 : limites en un point	5
3	Corrections des exercices 4 à 6 : limites à l'infini	7
4	Corrections des exercices 7 à 10 : asymptotes et problèmes	9
5	Corrections du rappel différé	11

1 Diagnostic : réponses et rappels ciblés

Correction D1

La multiplication est prioritaire :

$$7 - 2 \times 3 = 7 - 6 = 1.$$

Correction D2

Il faut un dénominateur commun. On transforme les quarts en huitièmes :

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}.$$

Pour additionner ou soustraire des fractions, on les écrit avec un même dénominateur. On additionne ou soustrait ensuite les numérateurs.

Correction D3

La racine impose $x + 2 \geq 0$, donc $x \geq -2$. Le dénominateur impose $x - 1 \neq 0$, donc $x \neq 1$. Ainsi,

$$\mathcal{D}_g = [-2, +\infty[\setminus \{1\}.$$

Correction D4

On remplace x par 2 :

$$f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 4 - 6 + 1 = -1.$$

Correction D5

$$\frac{1}{10} = 0,1, \quad \frac{1}{100} = 0,01.$$

Les valeurs positives se rapprochent de 0. On traduira ce comportement par

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Il s'agit d'une limite : pour tout nombre fini x , $1/x$ n'est pas égal à zéro.

Correction D6

La différence de deux carrés donne

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1).$$

Pour $x \neq 1$, le facteur $x - 1$ est non nul et peut être simplifié :

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1.$$

La formule simplifiée décrit les valeurs voisines, mais la formule initiale reste non définie en $x = 1$.

Correction D7

Si $x < 2$, alors $x - 2 < 0$, donc

$$\frac{1}{x - 2} < 0.$$

Si $x > 2$, alors $x - 2 > 0$, donc

$$\frac{1}{x-2} > 0.$$

Plus précisément, les valeurs deviennent très grandes en valeur absolue quand x se rapproche de 2 :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty.$$

Correction D8

$f(3)$ est la valeur obtenue en remplaçant effectivement x par 3, si la fonction est définie en 3. La limite $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ décrit les valeurs de $f(x)$ lorsque x est proche de 3, sans imposer $x = 3$. Les deux nombres peuvent être égaux, différents, ou bien la fonction peut ne pas être définie en 3. Par exemple,

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

n'est pas définie en 1, mais sa limite en 1 vaut 2.

Point de méthode

Les erreurs du diagnostic se répartissent en trois familles : calculs et signes (D1, D2, D4, D7), domaine (D3, D6) et compréhension de la limite (D5, D8). Reprendre seulement le rappel correspondant suffit souvent.

2 Corrections des exercices 1 à 3 : limites en un point

Correction 1 – Vocabulaire et lecture de limites

a) Pour une expression polynomiale ou une racine définie au voisinage du point, on peut substituer directement :

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 3 \times 2 - 1 = 5,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0.$$

À l'infini, on utilise la limite usuelle de la fonction inverse :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

b) Si $x \rightarrow 0^-$, alors x est négatif et proche de zéro :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Si $x \rightarrow 0^+$, alors x est positif et proche de zéro :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Les limites latérales étant différentes, il n'existe pas de limite bilatérale finie ou infinie de $1/x$ en 0.

c) Non. La limite observe les valeurs pour x proche de 3, alors que $f(3)$ concerne le point lui-même. La fonction peut être non définie en 3, ou bien avoir une valeur différente. Par exemple,

$$r(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \neq 3, \\ 10 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

vérifie $\lim_{x \rightarrow 3} r(x) = 5$, mais $r(3) = 10$.

Correction 2 – Domaine et calcul direct

a) La racine impose

$$2x + 1 \geq 0 \iff x \geq -\frac{1}{2}.$$

Le dénominateur impose $x \neq 3$. Ainsi,

$$\mathcal{D}_g = \left[-\frac{1}{2}, +\infty \right[\setminus \{3\}.$$

b) Le point 0 appartient au domaine et le dénominateur ne s'annule pas en 0. La substitution directe convient :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{\sqrt{2 \times 0 + 1}}{0 - 3} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}.$$

c) Lorsque $x \rightarrow 3^+$, $x - 3 \rightarrow 0^+$. Le numérateur tend vers $\sqrt{7} > 0$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = +\infty.$$

Lorsque $x \rightarrow 3^-$, $x - 3 \rightarrow 0^-$, tandis que le numérateur reste positif :

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = -\infty.$$

La droite $x = 3$ est une asymptote verticale.

Correction 3 – Deux formes indéterminées en un point

a) La substitution donne

$$\frac{3^2 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0}.$$

On factorise :

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3).$$

Pour $x \neq 3$,

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3.$$

On peut donc calculer la limite avec la formule simplifiée :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6.}$$

b) La substitution donne encore $0/0$. Pour $x \neq 0$, on multiplie par le conjugué :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} &= \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} \\ &= \frac{1 + x - 1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1}. \end{aligned}$$

La limite est alors directe :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{2}.}$$

3 Corrections des exercices 4 à 6 : limites à l'infini

Correction 4 – Terme dominant d'un polynôme

Le terme de plus haut degré est $2x^4$. Comme $x^4 \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ et lorsque $x \rightarrow -\infty$, on a

$$2x^4 \rightarrow +\infty$$

dans les deux directions. Les termes $-3x^2 + 7x - 1$ croissent moins vite en valeur absolue et ne changent pas la conclusion :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = +\infty.}$$

La parité est essentielle : une puissance paire est positive aux deux infinis, tandis qu'une puissance impaire change de signe.

Correction 5 – Quotients de polynômes

a) Les degrés sont égaux. En divisant par x^2 ,

$$\frac{5x^2 - 1}{2x^2 + 3} = \frac{5 - \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{3}{x^2}}.$$

À $+\infty$, les fractions en $1/x^2$ tendent vers zéro :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 1}{2x^2 + 3} = \frac{5}{2}.}$$

b) Le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur :

$$\frac{4x + 1}{x^2 + 1} = \frac{\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

À $-\infty$, $1/x$ et $1/x^2$ tendent vers zéro. Donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 1}{x^2 + 1} = 0.}$$

c) En divisant par x^2 ,

$$\frac{2x^3 - x}{x^2 + 1} = \frac{2x - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

À $+\infty$, le numérateur tend vers $+\infty$ et le dénominateur vers $1 > 0$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x}{x^2 + 1} = +\infty.}$$

Le quotient se comporte comme $2x$.

Correction 6 – Encadrement et exponentielle

a) Pour $x \geq 1$,

$$x^2 + 1 \geq x^2 > 0.$$

En prenant les inverses, l'inégalité s'inverse :

$$0 < \frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{x^2}.$$

Les deux bornes ont pour limite 0 à $+\infty$. Le théorème des gendarmes donne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0.$$

b) La croissance comparée affirme que l'exponentielle domine toute puissance entière positive :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0.$$

c) Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $-2x \rightarrow -\infty$. La limite usuelle de l'exponentielle donne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0.$$

Point de méthode

Dans un quotient à l'infini, une méthode sûre consiste à diviser numérateur et dénominateur par la plus grande puissance de x . Dans un encadrement, ne pas oublier que prendre les inverses de nombres positifs inverse le sens de l'inégalité.

4 Corrections des exercices 7 à 10 : asymptotes et problèmes

Correction 7 – Asymptotes de la fonction inverse déplacée

a) Le seul interdit est l'annulation du dénominateur :

$$x - 4 \neq 0 \iff x \neq 4.$$

Donc $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

b) Aux deux infinis, $1/(x - 4) \rightarrow 0$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 2.$$

Près de 4, si $x \rightarrow 4^-$, alors $x - 4 \rightarrow 0^-$ et $1/(x - 4) \rightarrow -\infty$. Si $x \rightarrow 4^+$, alors $x - 4 \rightarrow 0^+$ et $1/(x - 4) \rightarrow +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} h(x) = +\infty.$$

c) Les limites précédentes donnent :

$$\boxed{y = 2 \text{ est une asymptote horizontale,} \quad x = 4 \text{ est une asymptote verticale.}}$$

d) Lorsque x devient très grand et positif, le terme $1/(x - 4)$ devient proche de zéro. Donc $h(x)$ se rapproche de 2.

Correction 8 – Modèle d'une température

a)

$$T(0) = 18 + 72e^0 = 18 + 72 = 90.$$

Cette valeur représente la température initiale, au temps $t = 0$, soit 90°C .

b) Lorsque $t \rightarrow +\infty$, on a $-0,3t \rightarrow -\infty$, donc $e^{-0,3t} \rightarrow 0$. Par conséquent,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = 18 + 72 \times 0 = \boxed{18}.$$

c) À long terme, la température se rapproche de 18°C . L'asymptote horizontale est donc

$$\boxed{y = 18.}$$

La limite n'affirme pas nécessairement que la température atteint exactement 18°C à un temps fini.

Correction 9 – Trou amovible et rédaction

a) Le dénominateur impose $x + 1 \neq 0$, donc $x \neq -1$:

$$\boxed{\mathcal{D}_k = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.}$$

b) Le numérateur se factorise :

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2).$$

Pour $x \neq -1$,

$$k(x) = \frac{(x + 1)(x + 2)}{x + 1} = x + 2.$$

c) La formule simplifiée donne une limite directe :

$$\lim_{x \rightarrow -1} k(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x + 2) = 1.$$

d) La fonction initiale n'est pas définie en -1 . Sa courbe est la droite $y = x + 2$ privée du point de coordonnées $(-1, 1)$. Il s'agit d'un trou amovible : les valeurs voisines se rapprochent de 1, mais le point n'appartient pas à la courbe.

Correction 10 – Problème de synthèse

a) Le quotient $(2x - 1)/(x^2 + 1)$ est défini pour tout réel car $x^2 + 1 > 0$. Le seul interdit vient de $x - 4$. Ainsi,

$$\mathcal{D}_F = \mathbb{R} \setminus \{4\}.$$

b) À $+\infty$ comme à $-\infty$,

$$\frac{2x - 1}{x^2 + 1} \longrightarrow 0$$

car le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur, et

$$\frac{3}{x - 4} \longrightarrow 0.$$

Par les opérations sur les limites,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 5, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 5.$$

c) Au voisinage de 4, le premier quotient possède une limite finie :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x - 1}{x^2 + 1} = \frac{8 - 1}{16 + 1} = \frac{7}{17}.$$

Le terme $3/(x - 4)$ commande la divergence. À gauche, $x - 4 \rightarrow 0^-$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} F(x) = -\infty.$$

À droite, $x - 4 \rightarrow 0^+$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} F(x) = +\infty.$$

d) Les limites à l'infini donnent l'asymptote horizontale

$$y = 5.$$

Les limites infinies en 4 donnent l'asymptote verticale

$$x = 4.$$

e) Une rédaction possible est la suivante : « Aux deux infinis, les deux termes variables tendent vers zéro ; $F(x)$ se rapproche donc de 5 et la droite $y = 5$ est une asymptote horizontale. En revanche, près de $x = 4$, le terme $3/(x - 4)$ diverge : $F(x)$ tend vers $-\infty$ à gauche et vers $+\infty$ à droite. La droite $x = 4$ est une asymptote verticale. » Cette conclusion distingue bien les deux directions.

5 Corrections du rappel différé

Correction R1

a) Les degrés du numérateur et du dénominateur sont égaux. En divisant par x^2 ,

$$\frac{7x^2 + 1}{x^2 - 3} = \frac{7 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{3}{x^2}} \longrightarrow \frac{7}{1} = 7.$$

b) En divisant par x^2 ,

$$\frac{x^3}{x^2 + 1} = \frac{x}{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

À $-\infty$, le facteur x tend vers $-\infty$ et le dénominateur vers $1 > 0$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 + 1} = -\infty.$$

c) Lorsque $x \rightarrow 0^+$, x est positif et proche de zéro :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5}{x} = +\infty.$$

Correction R2

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} \longrightarrow \text{factorisation, car } x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2);$$

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \longrightarrow \text{expression conjuguée};$$

$$\frac{3x^4 - x}{x^2 + 1} \longrightarrow \text{terme dominant ou division par } x^2;$$

$$\frac{1}{x^2 + 1} \longrightarrow \text{comparaison ou encadrement.}$$

Il n'y a pas ici de simple substitution directe : chacune des expressions a été choisie pour rappeler une transformation.

Correction R3

Le degré du numérateur est 2, celui du dénominateur est 3. Le dénominateur croît donc plus vite en valeur absolue. En divisant par x^3 ,

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 + 2} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{2}{x^3}} \longrightarrow \frac{0 + 0}{1 + 0} = 0.$$

L'erreur consiste à remplacer le quotient par un rapport qui ne tient pas compte des degrés, ou à lire « 1 » sans effectuer la comparaison. La réponse correcte est

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 2} = 0.}$$

Correction R4

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $-x \rightarrow -\infty$, donc $e^{-x} \rightarrow 0$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (6 - 2e^{-x}) = 6 - 2 \times 0 = \boxed{6}.$$

À long terme, la quantité modélisée par $q(x)$ se rapproche de 6. La droite $y = 6$ est l'asymptote horizontale correspondante.

Point de méthode

Une correction explique à la fois le calcul et le choix de la méthode. Pour vérifier une réponse, se demander : la direction est-elle la bonne ? le signe est-il cohérent ? le résultat respecte-t-il le domaine et le sens de la situation ?