

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Limites des fonctions

Décrire le comportement d'une fonction près d'un point ou à l'infini

Un cours progressif avec exemples, exercices et indices

Objectifs

- Comprendre une limite en un point et en $+\infty$ ou $-\infty$.
- Calculer des limites simples avec les limites usuelles et les opérations.
- Transformer une forme indéterminée par factorisation, conjugué, comparaison ou terme dominant.
- Interpréter une limite graphiquement, notamment pour reconnaître une asymptote parallèle à un axe.

Cadre du chapitre. On suppose ici que l'élève prépare le baccalauréat général avec l'enseignement de spécialité mathématiques. Pour la session 2027, le programme de référence est le Bulletin officiel spécial n° 8 du 25 juillet 2019. Il demande les limites en un point et en $+\infty$ ou $-\infty$, les limites des fonctions de référence (puissances entières, racine carrée, exponentielle), les opérations, la comparaison et le lien avec les asymptotes parallèles aux axes. Les exercices de ce fascicule sont créés pour l'apprentissage : ils ne sont pas des sujets officiels.

Un nouveau programme a été publié au Bulletin officiel n° 14 du 2 avril 2026. Il entrera en application en classe de terminale à la rentrée 2027–2028 et reprend, pour cette partie, le même cœur de notions. Les textes sont accessibles dans le BO spécial n° 8 de 2019 et le BO n° 14 de 2026.

Organisation conseillée. Prévoir quatre à six séances de 35 à 45 minutes, avec une pause courte :

1. diagnostic, vocabulaire et lecture graphique ;
2. limites en un point et limites usuelles ;
3. limites à l'infini, terme dominant et quotients ;
4. comparaison, exponentielle et asymptotes ;
5. exercices de synthèse et rappel différé.

Les exercices sont dans ce fascicule avec leurs indices. Les corrections détaillées sont dans le fascicule séparé **corrections.pdf**. Cherche d'abord seule, consulte l'indice si nécessaire, puis seulement la correction.

Table des matières

1	Avant de commencer : diagnostic et rappels	3
2	1. Comprendre ce qu'est une limite	4
3	2. Limites usuelles et calcul direct	6
4	3. Limite en un point : transformer une forme indéterminée	8
5	4. Limite en $+\infty$ ou $-\infty$	10
6	5. Comparer et encadrer	12
7	6. Asymptotes et méthode de synthèse	13
8	Exercices gradués	15
9	Bilan, erreurs fréquentes et rappel différé	19

1 Avant de commencer : diagnostic et rappels

Durée indicative : 12 à 15 minutes, sans note et sans calculatrice. Ce diagnostic sert à repérer les gestes à reprendre, pas à attribuer une note. Si une question bloque, écrire simplement « à revoir » et continuer. Les réponses sont dans le fascicule séparé des corrections.

D1. Calculer en respectant les priorités : $7 - 2 \times 3$.

D2. Simplifier $\frac{3}{4} - \frac{1}{8}$, puis rappeler la condition qui permet d'additionner deux fractions.

D3. Donner l'ensemble de définition de $g(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$.

D4. Pour $f(x) = x^2 - 3x + 1$, calculer $f(2)$.

D5. Calculer $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{100}$. Que semblent devenir les valeurs de $1/x$ lorsque x devient très grand et positif ?

D6. Factoriser $x^2 - 1$. Que devient $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ lorsque $x \neq 1$?

D7. Comparer les signes de $\frac{1}{x-2}$ lorsque x est juste inférieur à 2, puis juste supérieur à 2.

D8. Expliquer avec ses mots la différence entre $f(3)$ et la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 3.

1.1 Les prérequis indispensables

Ensemble de définition. Une fonction ne peut être utilisée que pour les nombres autorisés par sa formule. Il est interdit de diviser par zéro et le nombre sous une racine carrée doit être positif ou nul. Ainsi, pour

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1},$$

il faut simultanément $x + 2 \geq 0$ et $x - 1 \neq 0$. Son ensemble de définition est donc

$$\mathcal{D}_g = [-2, +\infty[\setminus \{1\}.$$

Calcul littéral. Les identités remarquables seront utiles :

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1), \quad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Il faut aussi savoir mettre un facteur commun en évidence et simplifier une fraction seulement après avoir vérifié ce qui est non nul.

Intervalles et sens de lecture. Dire que x tend vers a ne signifie pas forcément que $x = a$. Dire que x tend vers $+\infty$ signifie que x prend des valeurs positives de plus en plus grandes : 10, 100, 1000, ... Tendre vers $-\infty$ signifie devenir négatif avec une valeur absolue de plus en plus grande.

Puissances et signes. Pour tout x , $x^2 \geq 0$. Le signe de x^3 est celui de x . Enfin,

$$\sqrt{x^2} = |x|,$$

et non toujours x . Cette égalité est une source fréquente d'erreurs dans les limites à $-\infty$.

À retenir

Avant toute limite, vérifier le domaine, la direction étudiée ($x \rightarrow a$, $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$), puis regarder la forme de l'expression.

2 1. Comprendre ce qu'est une limite

2.1 L'idée essentielle : observer le comportement

La limite décrit la valeur vers laquelle $f(x)$ se rapproche lorsque x se rapproche d'un nombre ou devient très grand en valeur absolue. Elle répond à une question de comportement : « que devient la sortie de la fonction quand on s'approche de cette situation ? »

Considérons

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

La formule n'autorise pas $x = 1$, mais pour $x \neq 1$, on peut écrire $f(x) = x + 1$. Les valeurs proches de 1 sont donc proches de 2 :

x	0,9	0,99	1,01	1,1
$f(x)$	1,9	1,99	2,01	2,1

On écrit

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2.$$

La limite vaut 2, même si $f(1)$ n'existe pas. La limite et la valeur de la fonction sont deux informations différentes.

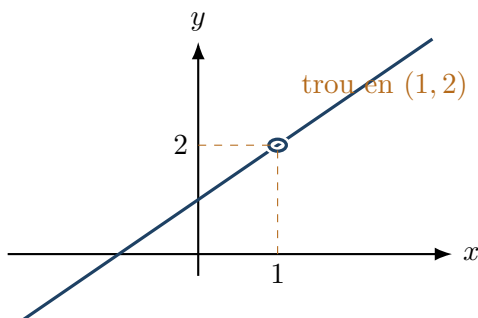


FIGURE 1 – La courbe se rapproche du point $(1, 2)$, mais ce point n'appartient pas à la courbe. La limite en 1 est tout de même égale à 2.

2.2 Les notations

Si $f(x)$ se rapproche du réel ℓ lorsque x se rapproche de a , on note

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell.$$

Le symbole $x \rightarrow a$ se lit « x tend vers a ». Pour étudier un seul côté, on utilise

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad \text{pour le côté gauche,} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{pour le côté droit.}$$

Si les deux comportements sont différents, la limite bilatérale $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ n'existe pas.

Lorsque x devient très grand et positif, on écrit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell.$$

Lorsque x devient très négatif, on écrit

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell.$$

Une limite peut aussi être infinie, par exemple $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x = +\infty$. Cela signifie que les valeurs deviennent arbitrairement grandes ; $+\infty$ n'est pas un nombre réel que l'on remplacerait dans une formule.

2.3 Lire une limite sur une courbe

Sur une représentation graphique, on peut suivre la courbe :

- en se déplaçant vers une abscisse a , on observe la hauteur vers laquelle la courbe se rapproche ;
- en allant vers la droite, on étudie $x \rightarrow +\infty$; en allant vers la gauche, $x \rightarrow -\infty$;
- si la courbe se rapproche d'une droite horizontale $y = \ell$, cela suggère une limite égale à ℓ à l'infini ;
- si la courbe monte ou descend sans borne près de $x = a$, la droite $x = a$ peut être une asymptote verticale.

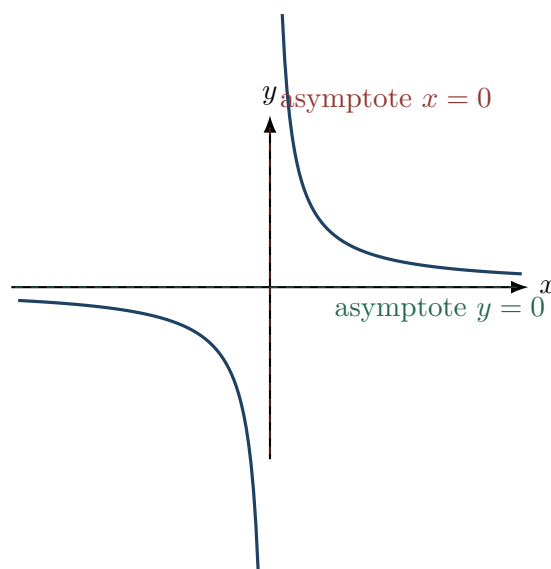


FIGURE 2 – Pour la fonction inverse, $x = 0$ est une asymptote verticale et $y = 0$ est une asymptote horizontale.

À retenir

Une limite décrit un comportement au voisinage d'un point ou à l'infini. Elle ne donne pas forcément la valeur de la fonction au point. Une limite infinie décrit une divergence, et non un réel « égal à l'infini ».

3 2. Limites usuelles et calcul direct

3.1 Les limites de référence

Les fonctions étudiées en première fournissent des repères. Dans le tableau, n désigne un entier naturel non nul et a un réel pour lequel la formule est définie.

Fonction	Limite	Lecture
x^n	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$	Une puissance entière positive devient grande à droite.
x^n	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$	Le signe dépend de la parité.
$\sqrt{x}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	La racine carrée est définie pour $x \geq 0$.
e^x	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$	L'exponentielle est toujours positive.
$\frac{1}{x}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$	Le signe est celui de x .
$\frac{1}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$	Les deux côtés de zéro donnent des signes différents.

Pour une fonction de référence continue au point étudié, le calcul direct est possible : on remplace x par la valeur vers laquelle il tend. Le domaine reste à vérifier.

Exemple entièrement détaillé

Calculons

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x+5}.$$

La fonction racine carrée est définie au voisinage de 4, car $x+5 > 0$ pour les valeurs proches de 4. On peut donc remplacer x par 4 :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x+5} = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3.$$

La courbe se rapproche de la hauteur 3 lorsque l'abscisse se rapproche de 4.

3.2 Les opérations sur les limites

Lorsque les limites utilisées existent et que l'opération a un sens, on peut additionner, soustraire, multiplier ou diviser les limites :

$$\begin{aligned} \lim(f+g) &= \lim f + \lim g, \\ \lim(fg) &= (\lim f)(\lim g), \\ \lim\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{\lim f}{\lim g} \quad \text{si } \lim g \neq 0. \end{aligned}$$

Les notations $\lim f$ et $\lim g$ signifient que les limites sont prises dans la même direction.

Certaines écritures ne donnent pas immédiatement une réponse :

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{+\infty}{+\infty}, \quad +\infty - \infty.$$

Ce sont des **formes indéterminées**. Elles signalent qu'une transformation est nécessaire ; elles ne donnent pas la limite.

Exemple entièrement détaillé

Calculons directement

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 4x + 1).$$

La fonction polynôme est définie pour tout réel. Les opérations sur les limites donnent donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 4x + 1) &= 3 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 4 \lim_{x \rightarrow 2} x + 1 \\ &= 3 \times 2^2 - 4 \times 2 + 1 \\ &= 12 - 8 + 1 \\ &= 5. \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 4x + 1) = 5$.

À retenir

Si la formule est définie et régulière au point étudié, commencer par remplacer x par la valeur visée. Si l'on obtient $0/0$, ∞/∞ ou $\infty - \infty$, ne pas conclure : il faut transformer l'expression.

4 3. Limite en un point : transformer une forme indéterminée

4.1 Le cas $0/0$: factoriser

Quand un quotient donne $0/0$, on cherche souvent un facteur commun au numérateur et au dénominateur. On simplifie ensuite sur les valeurs où le dénominateur initial est non nul.

Exemple entièrement détaillé

Calculons

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

La substitution donne $0/0$, donc il ne faut pas répondre « zéro ». Avec une différence de deux carrés,

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1).$$

Pour $x \neq 1$,

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1.$$

La nouvelle expression a une limite directe :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2.$$

La simplification permet d'étudier les valeurs voisines ; elle ne crée pas la valeur de départ en $x = 1$.

4.2 Le cas avec une racine : utiliser l'expression conjuguée

Pour une différence $\sqrt{A} - \sqrt{B}$, on utilise

$$(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = A - B.$$

Multiplier le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{A} + \sqrt{B}$ permet souvent de supprimer la différence de racines.

Exemple entièrement détaillé

Calculons

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}.$$

La substitution donne $0/0$. Pour $x \neq 0$, on multiplie par le conjugué :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} &= \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} \\ &= \frac{(1+x) - 1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} \\ &= \frac{x}{x(\sqrt{1+x} + 1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1}. \end{aligned}$$

La limite devient directe :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}.$$

4.3 Limites à gauche et à droite

Près de 2, le numérateur 1 est positif, tandis que $x - 2$ est négatif à gauche et positif à droite :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x - 2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 2} = +\infty.$$

Les deux limites latérales étant différentes, la limite bilatérale en 2 n'existe pas. La droite $x = 2$ est une asymptote verticale.

Méthode

Pour une limite en un point :

1. vérifier que les valeurs considérées appartiennent au domaine ;
2. essayer la substitution directe ;
3. si l'on obtient une forme indéterminée, factoriser, développer, rationaliser ou mettre au même dénominateur selon l'expression ;
4. recalculer la limite après la transformation ;
5. si le dénominateur tend vers zéro, étudier séparément le signe à gauche et à droite.

À retenir

Une forme $0/0$ n'est pas une réponse. Elle signale qu'il faut chercher une simplification. Pour une racine, penser à l'expression conjuguée. Pour une asymptote verticale, les deux côtés peuvent avoir des signes opposés.

5 4. Limite en $+\infty$ ou $-\infty$

5.1 Le terme dominant d'un polynôme

Dans un polynôme, le terme de plus haut degré finit par être beaucoup plus grand en valeur absolue que les autres. C'est le **terme dominant**. Ainsi, pour $x \rightarrow +\infty$,

$$3x^2 - 5x + 1 \text{ se comporte comme } 3x^2.$$

Pour connaître le signe, tenir compte du coefficient dominant, du signe de x et de la parité de la puissance.

Exemple entièrement détaillé

Soit $p(x) = -2x^3 + x^2 - 4$. À $+\infty$, le terme dominant $-2x^3$ tend vers $-\infty$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = -\infty.$$

À $-\infty$, $x^3 \rightarrow -\infty$, donc $-2x^3 \rightarrow +\infty$, et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = +\infty.$$

Le terme x^2 , bien que positif, croît moins vite que $2x^3$ en valeur absolue.

5.2 Quotient de polynômes : comparer les degrés

Pour un quotient de polynômes, on peut diviser le numérateur et le dénominateur par la plus grande puissance de x présente :

Situation	Comportement habituel
Degré du numérateur plus petit que celui du dénominateur	la limite est 0 ;
Degrés égaux	la limite est le quotient des coefficients dominants ;
Degré du numérateur plus grand	le quotient se comporte comme le quotient des termes dominants ; il peut diverger.

Exemple entièrement détaillé

Calculons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^2 + 2}.$$

On divise chaque terme par x^2 :

$$\frac{3x^2 - 5x + 1}{x^2 + 2} = \frac{3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}}.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $1/x \rightarrow 0$ et $1/x^2 \rightarrow 0$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^2 + 2} = \frac{3 - 0 + 0}{1 + 0} = 3.$$

Le graphe peut donc se rapprocher de la droite horizontale $y = 3$ à droite.

5.3 Une racine contenant x^2 : penser à $|x|$

Exemple entièrement détaillé

Calculons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x}.$$

Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} &= \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{4}{x^2}\right)}}{x} \\ &= \frac{x \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}{x} \\ &= \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} = 1.$$

À $-\infty$, il faudrait écrire $\sqrt{x^2} = |x| = -x$: la limite serait alors -1 . Cette différence vient du signe de x .

À retenir

À l'infini, repérer le terme dominant. Dans un quotient, comparer les degrés ou diviser par la plus grande puissance de x . Avec $\sqrt{x^2}$, écrire $|x|$, puis utiliser le signe de la direction étudiée.

6 5. Comparer et encadrer

6.1 Le principe de comparaison

Si, à partir d'une certaine valeur de x , une fonction est comprise entre deux fonctions qui ont la même limite, elle a cette même limite. C'est le **théorème des gendarmes** :

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x), \quad \lim g = \lim h = \ell \implies \lim f = \ell.$$

On peut aussi comparer une fonction à une fonction qui diverge : si $f(x) \geq g(x)$ et $g(x) \rightarrow +\infty$, alors $f(x) \rightarrow +\infty$.

Exemple entièrement détaillé

Calculons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Pour $x \geq 1$, $x^2 + 1 \geq x^2 > 0$. En prenant les inverses, le sens s'inverse :

$$0 < \frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{x^2}.$$

Or les deux bornes tendent vers 0. Le théorème des gendarmes donne donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0.}$$

6.2 Croissance comparée de l'exponentielle

À $+\infty$, l'exponentielle domine toute puissance entière positive : pour tout entier $n \geq 1$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

Cette propriété permet de traiter $x^4 e^{-x} = x^4 / e^x$. Elle décrit ce qui se passe suffisamment loin vers la droite.

Exemple entièrement détaillé

Calculons

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x}.$$

On réécrit

$$x^3 e^{-x} = \frac{x^3}{e^x}.$$

La croissance comparée donne

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = 0.}$$

De même, si $x \rightarrow +\infty$, alors $-x \rightarrow -\infty$, puis $e^{-x} \rightarrow 0$.

À retenir

Pour un encadrement, écrire les inégalités et les limites des bornes. Pour l'exponentielle, retenir qu'à $+\infty$ elle domine toute puissance x^n ; réécrire e^{-x} comme $1/e^x$ aide souvent.

7 6. Asymptotes et méthode de synthèse

7.1 Asymptote horizontale

Si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell,$$

alors la droite $y = \ell$ est une asymptote horizontale à la courbe à droite. Si la même limite est obtenue à $-\infty$, la même droite est aussi une asymptote à gauche.

Pour

$$f(x) = 4 - \frac{3}{x-1},$$

on a $1/(x-1) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4.$$

La droite $y = 4$ est une asymptote horizontale aux deux extrémités.

7.2 Asymptote verticale

Si, lorsque x se rapproche de a d'un côté au moins,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty,$$

alors la droite $x = a$ est une asymptote verticale. Pour $f(x) = 4 - 3/(x-1)$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty,$$

donc $x = 1$ est une asymptote verticale.

Les asymptotes obliques, de la forme $y = ax + b$, sont un approfondissement possible. Elles ne sont pas nécessaires pour maîtriser les méthodes essentielles de ce fascicule.

7.3 La méthode générale

Pour rédiger une étude de limite :

1. préciser le domaine et la direction étudiée ;
2. essayer une substitution directe si l'on tend vers un nombre ;
3. identifier une limite usuelle ou un terme dominant ;
4. transformer l'expression si une forme indéterminée apparaît ;
5. utiliser une comparaison ou un encadrement si nécessaire ;
6. conclure avec une phrase et interpréter l'asymptote éventuelle.

Exemple entièrement détaillé

Pour $t \geq 0$, une température est modélisée par

$$T(t) = 20 + 80e^{-0,4t},$$

où t est un temps en heures et $T(t)$ une température en degrés Celsius. Comme $t \rightarrow +\infty$, $-0,4t \rightarrow -\infty$, donc $e^{-0,4t} \rightarrow 0$. Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = 20 + 80 \times 0 = 20.$$

La température se rapproche de 20°C à long terme. La droite $y = 20$ est l'asymptote horizontale correspondante.

À retenir

Une limite finie à l'infini donne une asymptote horizontale. Une limite infinie en un point donne une asymptote verticale. Toujours distinguer la direction, le signe et le sens concret du résultat.

8 Exercices gradués

Les exercices sont classés du rappel vers l'autonomie. Pour chacun, la compétence travaillée est indiquée. Les indices relancent la recherche sans donner tous les calculs. Les corrections détaillées, numérotées de la même façon, sont dans le fascicule séparé.

Exercice 1 – Vocabulaire et lecture de limites

Compétence : utiliser des limites usuelles.

- a) Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}.$$

- b) Donner les limites à gauche et à droite de $1/x$ lorsque $x \rightarrow 0$.

- c) La phrase « $f(x)$ tend vers 5 lorsque x tend vers 3 » implique-t-elle nécessairement que $f(3) = 5$? Justifier.

Indice.

Pour b), étudier le signe de x de chaque côté de zéro. Pour c), reprendre l'exemple du trou en $(1, 2)$.

Exercice 2 – Domaine et calcul direct

Compétence : vérifier le domaine avant une substitution. On considère

$$g(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{x-3}.$$

- a) Déterminer l'ensemble de définition de g .

- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

- c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x)$.

Indice.

Pour a), impose $2x + 1 \geq 0$ et $x \neq 3$. Pour c), près de 3, le numérateur est positif et proche de $\sqrt{7}$; étudie le signe de $x - 3$.

Exercice 3 – Deux formes indéterminées en un point

Compétence : factoriser et utiliser une expression conjuguée.

- a) Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

- b) Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}.$$

- c) Pour chaque question, indiquer la forme obtenue lors de la substitution avant la transformation.

Indice.

Pour a), utiliser $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$. Pour b), multiplier en haut et en bas par $\sqrt{1+x} + 1$.

Exercice 4 – Terme dominant d'un polynôme

Compétence : calculer une limite à l'infini. Soit $p(x) = 2x^4 - 3x^2 + 7x - 1$. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x).$$

Expliquer le rôle de la parité du degré dominant.

Indice.

Le terme dominant est $2x^4$. Une puissance paire est positive aux deux infinis.

Exercice 5 – Quotients de polynômes

Compétence : comparer les degrés.

a) Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 1}{2x^2 + 3}.$$

b) Calculer

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 1}{x^2 + 1}.$$

c) Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x}{x^2 + 1}.$$

Indice.

Dans chaque quotient, diviser par la plus grande puissance de x présente. Pour c), il restera un facteur x : son signe est important.

Exercice 6 – Encadrement et exponentielle

Compétence : choisir entre comparaison et croissance comparée.

a) Démontrer par encadrement que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0.$$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{e^x}$.

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x}$.

Indice.

Pour a), comparer $1/(x^2+1)$ à $1/x^2$ pour $x \geq 1$. Pour b), utiliser la croissance comparée. Pour c), regarder l'exposant.

Exercice 7 – Asymptotes de la fonction inverse déplacée

Compétence : relier limites et asymptotes. On considère

$$h(x) = 2 + \frac{1}{x - 4}.$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de h .

b) Calculer les limites de h en $+\infty$, $-\infty$, 4^- et 4^+ .

- c) En déduire les asymptotes parallèles aux axes.
- d) Rédiger une phrase décrivant le comportement de $h(x)$ lorsque x devient très grand.

Indice.

Le terme $1/(x-4)$ tend vers zéro aux deux infinis. Près de 4, son signe est celui de $x-4$.

Exercice 8 – Modèle d'une température

Compétence : interpréter une limite dans un contexte. Pour $t \geq 0$, une température est modélisée par

$$T(t) = 18 + 72e^{-0,3t},$$

où t est exprimé en heures et $T(t)$ en degrés Celsius.

- a) Calculer $T(0)$. Que représente cette valeur ?
- b) Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t)$.
- c) Interpréter cette limite et donner l'équation de l'asymptote horizontale.

Indice.

Lorsque $t \rightarrow +\infty$, l'exposant $-0,3t$ tend vers $-\infty$. La partie exponentielle tend donc vers zéro.

Exercice 9 – Trou amovible et rédaction

Compétence : distinguer valeur, domaine et limite. On considère

$$k(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}.$$

- a) Déterminer le domaine de k .
- b) Factoriser le numérateur et simplifier la formule pour $x \neq -1$.
- c) Calculer $\lim_{x \rightarrow -1} k(x)$.
- d) La fonction k possède-t-elle une valeur en -1 ? Que peut-on dire du point correspondant sur la courbe ?

Indice.

Le numérateur est factorisable par $x+1$. La simplification ne modifie pas le domaine de la formule initiale.

Exercice 10 – Problème de synthèse

Compétence : choisir une méthode, rédiger et interpréter. Pour $x \neq 4$, on considère

$$F(x) = 5 + \frac{2x - 1}{x^2 + 1} + \frac{3}{x - 4}.$$

- a) Déterminer l'ensemble de définition de F .
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$.
- c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 4^-} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 4^+} F(x)$.
- d) En déduire les asymptotes parallèles aux axes.
- e) Rédiger une conclusion qui distingue le comportement aux infinis du comportement près de 4.

Indice.

À l'infini, le quotient de degré 1 par degré 2 tend vers zéro et $3/(x - 4)$ aussi. Près de 4, les deux autres termes restent finis ; le terme $3/(x - 4)$ commande le signe et la divergence.

9 Bilan, erreurs fréquentes et rappel différé

9.1 Bilan à relire avant un exercice

- Une limite décrit ce que devient $f(x)$ lorsque x s'approche d'une valeur ou devient très grand en valeur absolue.
- Une limite en un point n'est pas forcément la valeur de la fonction à ce point.
- En cas de substitution directe possible, on remplace x par la valeur visée.
- Les formes $0/0$, ∞/∞ et $\infty - \infty$ demandent une transformation.
- À l'infini, le terme dominant décide du comportement d'un polynôme ; dans un quotient, on compare les degrés.
- Un encadrement par deux fonctions de même limite permet de conclure.
- Une limite finie à l'infini donne une asymptote horizontale ; une limite infinie en un point donne une asymptote verticale.

9.2 Erreurs fréquentes à analyser

Erreur	Correction de méthode
Écrire $0/0 = 0$.	$0/0$ est une forme indéterminée : factoriser ou rationaliser.
Remplacer $+\infty$ par un grand nombre dans une formule.	$+\infty$ décrit une direction ; utiliser une limite usuelle et les opérations.
Écrire $\sqrt{x^2} = x$ sans préciser la direction.	Écrire $\sqrt{x^2} = x $, puis utiliser le signe de x .
Conclure avec un seul côté près d'un dénominateur nul.	Calculer ou comparer les limites à gauche et à droite.
Confondre $f(a)$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.	Vérifier séparément si $f(a)$ est définie.

9.3 Auto-évaluation

Je sais...	Oui	Presque	À revoir
expliquer une limite en un point et à l'infini			
vérifier le domaine avant un calcul			
reconnaître une forme indéterminée			
factoriser ou utiliser le conjugué			
trouver le terme dominant d'un polynôme ou d'un quotient			
relier une limite à une asymptote			
rédigier une phrase d'interprétation			

9.4 Rappel différé

À refaire quelques jours plus tard, sans relire immédiatement le cours. Les réponses sont dans le fascicule des corrections.

R1. Calculer rapidement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2 + 1}{x^2 - 3}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 + 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5}{x}.$$

R2. Sans calcul détaillé, associer chaque expression à une méthode : substitution directe, factorisation, conjugué, terme dominant ou comparaison.

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2}, \quad \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}, \quad \frac{3x^4 - x}{x^2 + 1}, \quad \frac{1}{x^2 + 1}.$$

R3. Une élève écrit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 2} = 1.$$

Identifier l'erreur et corriger le résultat.

R4. On considère $q(x) = 6 - 2e^{-x}$ pour $x \geq 0$. Calculer sa limite à $+\infty$ et l'interpréter en une phrase.

À retenir

En cas de blocage, revenir à trois questions : où x va-t-il ? quelle est la forme de l'expression ? quelle propriété ou transformation correspond à cette forme ? Une démarche partielle correctement expliquée est déjà une information utile.