

Fiche d'histoire mathématique

Approcher l'infini sans perdre la précision

De Zénon et Archimède à Cauchy et Weierstrass

Idée directrice. Une limite ne donne pas forcément une valeur atteinte. Elle décrit ce que deviennent les nombres lorsque l'on se rapproche de plus en plus d'un point ou que l'on avance de plus en plus loin. Cette idée s'est construite lentement, car elle oblige à parler avec précision de processus infinis.

Table des matières

1	Les paradoxes de l'infini	1
2	Archimède et la méthode d'épuisement	1
3	Les infinitésimaux et le calcul	1
4	Cauchy, Weierstrass et la définition moderne	2
5	Ce que l'histoire éclaire dans le cours	2
6	Pour aller plus loin	2

1 Les paradoxes de l'infini

Au V^e siècle avant notre ère, Zénon d'Élée imagine des paradoxes où un coureur doit d'abord parcourir la moitié d'une distance, puis la moitié de la distance restante, et ainsi de suite. Si l'on additionne une infinité d'étapes, comment peut-on arriver ?

Ces paradoxes ne donnent pas la définition moderne d'une limite, mais ils posent la question essentielle : une succession de petites quantités peut-elle avoir une somme finie ? Les suites géométriques, puis l'analyse, donneront un cadre pour répondre.

2 Archimède et la méthode d'épuisement

Archimède utilise une méthode d'*épuisement* pour encadrer des aires et des volumes. Il inscrit et circonscrit des polygones à un cercle, puis augmente le nombre de côtés. Les approximations se resserrent autour de la valeur cherchée.

Pour l'aire d'un segment de parabole, il obtient une somme géométrique infinie. L'idée est déjà celle d'une limite : on ne prétend pas que l'aire est composée d'un nombre fini de triangles, on montre que les encadrements peuvent être rendus aussi précis que l'on veut.

3 Les infinitésimaux et le calcul

Au XVII^e siècle, Kepler, Cavalieri, Fermat, Newton et Leibniz cherchent des méthodes pour calculer des tangentes, des aires et des vitesses. Ils utilisent des quantités très petites, appelées infinitésimales, qui rendent les calculs efficaces mais soulèvent des questions logiques.

Newton parle de fluxions et Leibniz de différentielles. Leurs méthodes donnent des résultats remarquables, mais la signification exacte du passage « de plus en plus petit » reste discutée. Le calcul est alors puissant avant d'être entièrement rigoureux.

4 Cauchy, Weierstrass et la définition moderne

Au XIX^e siècle, Augustin-Louis Cauchy replace la limite au centre de l'analyse. Une dérivée devient la limite d'un quotient de différences et une suite convergente est définie par la possibilité de rendre l'écart aussi petit que l'on veut à partir d'un certain rang.

Karl Weierstrass donne ensuite une formulation avec des inégalités : pour toute précision $\varepsilon > 0$, il faut pouvoir choisir un seuil à partir duquel l'écart est inférieur à ε . Cette formulation ne dépend plus d'une intuition géométrique d'une quantité « infiniment petite ».

Repère	Question
Zénon, V ^e siècle av. J.-C.	Comment penser une infinité d'étapes ?
Archimède, III ^e siècle av. J.-C.	Comment encadrer une aire par des approximations ?
XVII ^e siècle	Comment calculer avec des quantités infinitésimales ?
XIX ^e siècle	Comment définir la limite avec des inégalités précises ?

5 Ce que l'histoire éclaire dans le cours

- Une limite est une information sur un comportement, pas forcément une valeur atteinte.
- Un encadrement est une méthode ancienne et solide : si deux bornes se rapprochent, elles contrôlent la valeur cherchée.
- Les formes indéterminées demandent une transformation avant de conclure.
- Les asymptotes traduisent graphiquement un comportement limite.

À retenir. L'analyse moderne n'a pas supprimé l'intuition des approximations ; elle l'a rendue contrôlable. Dire qu'une quantité tend vers une valeur signifie pouvoir préciser l'erreur autorisée et garantir qu'elle sera finalement respectée.

6 Pour aller plus loin

- MacTutor, histoire générale du calcul infinitésimal : The rise of calculus.
- MacTutor, histoire des notations de limite et de dérivée : symbols of calculus.
- Pour l'origine géométrique des approximations d'aires, voir Archimède dans la même collection historique.