

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Corrections expliquées

Dérivation

À consulter après une première recherche personnelle

Utilisation. Cherche d’abord dans le fascicule du cours. Lis son indice si tu es bloquée, puis compare ta démarche avec la correction complète. Une réponse formulée autrement peut être correcte si elle respecte les données et si elle est justifiée. Les exercices sont des créations pédagogiques ; ils ne sont pas présentés comme des sujets officiels du baccalauréat.

Rappel de méthode. Avant de dériver, repérer la forme de l’expression et son domaine. Pour étudier les variations, calculer f' , résoudre $f'(x) = 0$, établir le signe de f' , puis calculer les valeurs utiles de f . Dans un problème concret, vérifier le domaine et interpréter le résultat avec les unités.

Table des matières

1	Diagnostic : réponses et rappels ciblés	3
2	Corrections des exercices 1 à 3 : sens local et tangente	5
3	Corrections des exercices 4 à 7 : calcul et variations	6
4	Corrections des exercices 8 à 10 : modèles et synthèse	8
5	Corrections du rappel différé	10

1 Diagnostic : réponses et rappels ciblés

Correction D1

On remplace x par 2 :

$$f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 4 - 6 + 1 = -1.$$

Correction D2

Le taux de variation entre 1 et 3 est

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{3^2 - 1^2}{2} = \frac{9 - 1}{2} = 4.$$

Ce nombre est la pente de la sécante qui joint les points de la courbe d'abscisses 1 et 3.

Correction D3

Le coefficient directeur vaut

$$m = \frac{10 - 4}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3.$$

Quand x augmente de 1, la droite monte de 3.

Correction D4

$$\begin{aligned}(a + h)^2 - a^2 &= a^2 + 2ah + h^2 - a^2 \\ &= 2ah + h^2 \\ &= h(2a + h).\end{aligned}$$

La factorisation par h sera utile pour simplifier un taux de variation.

Correction D5

$$2x - 6 = 2(x - 3).$$

Comme $2 > 0$, le signe est celui de $x - 3$:

$$\begin{cases} 2x - 6 < 0 & \text{si } x < 3, \\ 2x - 6 = 0 & \text{si } x = 3, \\ 2x - 6 > 0 & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

Correction D6

La forme « point-pente » donne

$$y - 5 = 2(x - 1).$$

En développant :

$$y - 5 = 2x - 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{y = 2x + 3}.$$

Correction D7

$$g(1) = 1^3 = 1, \quad g(1,1) = 1,1^3 = 1,331.$$

Le taux de variation est

$$\frac{1,331 - 1}{1,1 - 1} = \frac{0,331}{0,1} = 3,31.$$

Correction D8

Une distance en mètres divisée par un temps en secondes donne une vitesse en m/s, que l'on peut aussi écrire $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Point de méthode

Le diagnostic teste trois familles de gestes : calculer une image, calculer une pente et lire un signe. Une erreur dans une seule famille indique le rappel à reprendre ; elle ne résume pas toute la capacité à dériver.

2 Corrections des exercices 1 à 3 : sens local et tangente

Correction 1 – Taux de variation et sécante

a) On calcule les deux images :

$$f(1) = 1^2 - 2 \times 1 = -1, \quad f(3) = 3^2 - 2 \times 3 = 3.$$

b) Le taux de variation vaut

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{3 - (-1)}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2}.$$

c) La sécante qui joint $A(1; -1)$ à $B(3; 3)$ a donc pour coefficient directeur 2. Entre ces deux abscisses, la fonction augmente en moyenne de 2 unités de y lorsque x augmente d'une unité.

Correction 2 – Nombre dérivé à partir de la définition

On a

$$f(a) = a^2 + 2a.$$

Calculons l'image de $a + h$:

$$\begin{aligned} f(a + h) &= (a + h)^2 + 2(a + h) \\ &= a^2 + 2ah + h^2 + 2a + 2h. \end{aligned}$$

On soustrait $f(a)$, puis on divise par $h \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} &= \frac{a^2 + 2ah + h^2 + 2a + 2h - (a^2 + 2a)}{h} \\ &= \frac{2ah + h^2 + 2h}{h} \\ &= \frac{h(2a + h + 2)}{h} \\ &= 2a + h + 2. \end{aligned}$$

Quand h se rapproche de 0, cette expression se rapproche de $2a + 2$. Ainsi

$$\boxed{f'(a) = 2a + 2}.$$

En particulier,

$$\boxed{f'(2) = 2 \times 2 + 2 = 6}.$$

Correction 3 – Équation d'une tangente

On a

$$g(3) = 3^2 - 4 \times 3 + 1 = 9 - 12 + 1 = -2.$$

La dérivée est $g'(x) = 2x - 4$, donc

$$g'(3) = 2 \times 3 - 4 = 2.$$

La tangente en $x = 3$ a pour équation

$$\begin{aligned} y &= g(3) + g'(3)(x - 3) \\ &= -2 + 2(x - 3) \\ &= \boxed{2x - 8}. \end{aligned}$$

Elle passe bien par $(3; -2)$, car $2 \times 3 - 8 = -2$, et sa pente est 2.

3 Corrections des exercices 4 à 7 : calcul et variations

Correction 4 – Calculer une fonction dérivée

a) Par linéarité et avec $(x^3)' = 3x^2$,

$$\boxed{u'(x) = 12x^2 - 5}.$$

b) Avec $p(x) = x + 1$ et $q(x) = x^2 - 2$,

$$p'(x) = 1, \quad q'(x) = 2x.$$

La règle du produit donne

$$\begin{aligned} v'(x) &= p'(x)q(x) + p(x)q'(x) \\ &= (x^2 - 2) + (x + 1)(2x) \\ &= \boxed{3x^2 + 2x - 2}. \end{aligned}$$

c) Pour $x \neq 3$, avec $p(x) = 2x + 1$ et $q(x) = x - 3$,

$$p'(x) = 2, \quad q'(x) = 1.$$

Donc

$$\begin{aligned} w'(x) &= \frac{2(x - 3) - (2x + 1)}{(x - 3)^2} \\ &= \boxed{-\frac{7}{(x - 3)^2}}. \end{aligned}$$

d) Sur $]0, +\infty[$, la règle de la composition avec une fonction affine donne

$$\boxed{z'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2e^{2x}}.$$

Correction 5 – Valeur absolue et dérivabilité

Si $x < 0$, alors $|x| = -x$, donc la dérivée vaut -1 . Si $x > 0$, alors $|x| = x$, donc la dérivée vaut 1 .

Au voisinage de 0 , la pente des sécantes venant de la gauche se rapproche de -1 , tandis que celle des sécantes venant de la droite se rapproche de 1 . Ces deux nombres ne sont pas égaux. Il n'existe donc pas de nombre dérivé unique en 0 :

$$\boxed{x \mapsto |x| \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$$

Le point anguleux du graphe traduit cette impossibilité.

Correction 6 – Variations et extremum

On dérive et on factorise :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \\ &= 3(x^2 - 4x + 3) \\ &= 3(x - 1)(x - 3). \end{aligned}$$

Comme $3 > 0$, le signe est positif sur $] -\infty, 1[$, négatif sur $]1, 3[$, puis positif sur $]3, +\infty[$. La fonction est donc croissante, puis décroissante, puis croissante.

Les valeurs aux points critiques sont

$$f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5, \quad f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1.$$

Il y a un maximum local égal à 5 en $x = 1$, puis un minimum local égal à 1 en $x = 3$.

Correction 7 – Une inégalité par les variations

Posons $f(x) = x^4 + 2x^2 + 3$. Alors

$$f'(x) = 4x^3 + 4x = 4x(x^2 + 1).$$

Pour tout réel x , $x^2 + 1 > 0$. Le signe de f' est donc celui de x : la fonction décroît sur $] -\infty, 0[$ et croît sur $]0, +\infty[$. Elle atteint son minimum en 0, avec

$$f(0) = 3.$$

Par conséquent,

$$\boxed{x^4 + 2x^2 + 3 \geq 3 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

4 Corrections des exercices 8 à 10 : modèles et synthèse

Correction 8 – Optimisation géométrique

a) Si x et y sont les longueurs des côtés, le périmètre donne

$$2x + 2y = 36 \iff x + y = 18.$$

Ainsi $y = 18 - x$. Les longueurs étant positives, $0 < x < 18$.

b) L'aire, en cm^2 , est

$$A(x) = x(18 - x) = 18x - x^2.$$

c) On dérive :

$$A'(x) = 18 - 2x = 2(9 - x).$$

La dérivée est positive sur $]0, 9[$, nulle en 9, négative sur $]9, 18[$. L'aire augmente puis diminue ; elle est maximale pour $x = 9$. Alors $y = 18 - 9 = 9$ et

$$A(9) = 9 \times 9 = \boxed{81 \text{ cm}^2}.$$

Réponse : le carré de côté 9 cm est le rectangle d'aire maximale.

Correction 9 – Modèle de décroissance

a) Avec la dérivée de e^{at} ,

$$\begin{aligned} T'(t) &= 80 \times (-0,25)e^{-0,25t} \\ &= -20e^{-0,25t}. \end{aligned}$$

L'exponentielle est strictement positive, donc $T'(t) < 0$ pour tout $t \geq 0$. La température diminue.

b) À $t = 4$,

$$T'(4) = -20e^{-1} = -\frac{20}{e} \approx -7,4 \text{ }^\circ\text{C/min}.$$

La vitesse de refroidissement est donc d'environ $7,4 \text{ }^\circ\text{C/min}$ en valeur absolue ; le signe négatif dans $T'(4)$ indique une baisse.

c) Comme $e^{-0,25t}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = 20.$$

La température se rapproche de $20 \text{ }^\circ\text{C}$.

Correction 10 – Problème de synthèse : coût et recette

On travaille sur l'intervalle $[0, 8]$.

a) La dérivée est

$$B'(x) = -3x^2 + 18x + 12.$$

Résoudre $B'(x) = 0$ revient à résoudre

$$x^2 - 6x - 4 = 0.$$

Le discriminant vaut $\Delta = 36 + 16 = 52 = 4 \times 13$. Les racines sont

$$\alpha = 3 - \sqrt{13} < 0, \quad \beta = 3 + \sqrt{13} \approx 6,61.$$

On peut écrire

$$B'(x) = -3(x - \alpha)(x - \beta).$$

b) La racine α n'appartient pas à $[0, 8]$. On a $B'(0) = 12 > 0$, puis le signe change en β , car le coefficient du terme x^2 est négatif. Ainsi B est croissante sur $[0, \beta]$, puis décroissante sur $[\beta, 8]$.

c) Le bénéfice maximal est donc atteint en $x = \beta = 3 + \sqrt{13}$. Pour calculer sa valeur, on utilise $\beta^2 = 6\beta + 4$, conséquence de l'équation vérifiée par β . Alors

$$\beta^3 = \beta(6\beta + 4) = 6\beta^2 + 4\beta = 40\beta + 24,$$

et

$$\begin{aligned} B(\beta) &= -\beta^3 + 9\beta^2 + 12\beta - 20 \\ &= -(40\beta + 24) + 9(6\beta + 4) + 12\beta - 20 \\ &= 26\beta - 8 \\ &= \boxed{70 + 26\sqrt{13}} \\ &\approx 163,8. \end{aligned}$$

d) Dans le modèle continu, $x \approx 6,61$ signifie environ 661 objets, pour un bénéfice maximal d'environ 163,8 milliers d'euros. Si l'entreprise ne peut vendre qu'un nombre entier de centaines, il faut comparer les valeurs voisines : $B(6) = 160$ et $B(7) = 162$. On choisirait alors 7 centaines, soit 700 objets, dans ce modèle discret.

La dérivée décrit l'évolution du bénéfice entre tous les niveaux de production de l'intervalle ; quelques valeurs seules pourraient manquer un maximum situé entre deux essais.

5 Corrections du rappel différé

Correction R1

Pour $f(x) = x^2$, on calcule le taux de variation entre a et $a + h$:

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{h(2a+h)}{h} \\ &= 2a + h.\end{aligned}$$

Quand h tend vers 0, $2a + h$ tend vers $2a$. Donc

$$\boxed{f'(a) = 2a}.$$

Correction R2

Pour $f(x) = e^x$, on a $f(0) = 1$ et $f'(x) = e^x$, donc $f'(0) = 1$. La tangente en 0 est

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 + x.$$

Ainsi $\boxed{y = x + 1}$.

Correction R3

On dérive :

$$g'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3).$$

La fonction est décroissante sur $] -\infty, 3[$, puis croissante sur $]3, +\infty[$. Elle atteint son minimum en 3 :

$$g(3) = 9 - 18 + 5 = -4.$$

Correction R4

Oui, dans le modèle usuel où les longueurs sont positives. On note x un côté, on exprime l'autre côté à partir du périmètre, puis on écrit l'aire $A(x)$. La dérivée $A'(x)$ permet de repérer le point où l'aire augmente puis diminue. Pour un périmètre 36 cm, le calcul de l'exercice 8 donne le carré de côté 9 cm et d'aire 81 cm².

Point de méthode

Une bonne correction explique le choix de la méthode, montre les étapes de calcul et termine par une interprétation. Une réponse juste mais sans domaine, signe ou unité peut rester incomplète.