

## Baccalauréat général – spécialité mathématiques

# Dérivation

Mesurer une variation et étudier une fonction

Un cours progressif avec exemples, exercices et indices

## Objectifs

- Comprendre un taux de variation, un nombre dérivé et la pente d'une tangente.
- Calculer une dérivée en utilisant les fonctions de référence et les règles de calcul.
- Utiliser le signe de la dérivée pour étudier les variations et les extrema d'une fonction.
- Modéliser et résoudre un problème d'optimisation en rédigeant une réponse interprétée.

**Cadre du chapitre.** Ce fascicule reprend les notions de dérivation du programme de première générale : point de vue local (taux de variation, nombre dérivé, tangente), point de vue global (fonction dérivée), règles de calcul, variations, extrema et optimisation. La fonction exponentielle est également utilisée comme fonction de référence dont la dérivée est elle-même. Ce contenu est nécessaire pour le chapitre suivant, *Compléments sur la dérivation*.

Pour une préparation de la session 2027, le texte de référence est le programme de première publié au Bulletin officiel spécial n° 1 du 22 janvier 2019. Le nouveau programme publié au Bulletin officiel n° 14 du 2 avril 2026 s'appliquera progressivement et entrera en terminale à la rentrée 2027–2028. Les exercices de ce fascicule sont créés pour l'apprentissage ; ils ne sont pas des sujets officiels.

Les textes institutionnels sont accessibles dans le programme de première du 22 janvier 2019 et le programme de terminale publié le 2 avril 2026.

**Organisation conseillée.** Prévoir cinq ou six séances de 35 à 45 minutes, avec une pause courte :

1. diagnostic, taux de variation et pente d'une droite ;
2. nombre dérivé, tangente et approximation locale ;
3. tableau des dérivées et calcul d'une fonction dérivée ;
4. signe de la dérivée, variations et extrema ;
5. optimisation, inégalités et fonctions exponentielles ;
6. exercices de synthèse et rappel différé.

Les exercices sont dans ce fascicule avec leurs indices. Les corrections détaillées sont dans le fascicule séparé **corrections.pdf**. Cherche d'abord seule, consulte l'indice si nécessaire, puis seulement la correction.

## Table des matières

|          |                                                       |           |
|----------|-------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Avant de commencer : diagnostic et rappels</b>     | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>1. Du taux de variation à la tangente</b>          | <b>4</b>  |
| <b>3</b> | <b>2. La fonction dérivée et les règles de calcul</b> | <b>7</b>  |
| <b>4</b> | <b>3. Du signe de la dérivée aux variations</b>       | <b>9</b>  |
| <b>5</b> | <b>4. Optimisation et modèles de variation</b>        | <b>11</b> |
| <b>6</b> | <b>Exercices gradués</b>                              | <b>13</b> |
| <b>7</b> | <b>Bilan, erreurs fréquentes et rappel différé</b>    | <b>16</b> |

# 1 Avant de commencer : diagnostic et rappels

**Durée indicative : 12 à 15 minutes, sans note et sans calculatrice.** Ce diagnostic sert à repérer les gestes à reprendre, pas à attribuer une note. Si une question bloque, écrire simplement « à revoir » et continuer. Les réponses sont dans le fascicule séparé des corrections.

- D1.** Calculer  $f(2)$  pour  $f(x) = x^2 - 3x + 1$ .
- D2.** Calculer le taux de variation de  $f(x) = x^2$  entre  $x = 1$  et  $x = 3$ .
- D3.** Déterminer le coefficient directeur de la droite passant par  $A(1; 4)$  et  $B(3; 10)$ .
- D4.** Développer et réduire  $(a + h)^2 - a^2$ .
- D5.** Donner le signe de  $2x - 6$  selon la position de  $x$  par rapport à 3.
- D6.** Écrire l'équation de la droite de coefficient directeur 2 passant par  $A(1; 5)$ .
- D7.** Pour  $g(x) = x^3$ , calculer  $g(1)$ ,  $g(1,1)$ , puis le taux de variation entre 1 et 1,1.
- D8.** Une distance est exprimée en mètres et un temps en secondes. Quelle unité peut avoir une vitesse instantanée ?

## 1.1 Les prérequis indispensables

**Calcul littéral.** Pour calculer un taux de variation, il faut savoir remplacer  $x$  par une expression comme  $a + h$ , développer et factoriser :

$$\begin{aligned}(a + h)^2 - a^2 &= a^2 + 2ah + h^2 - a^2 \\ &= 2ah + h^2 = h(2a + h).\end{aligned}$$

**Coefficient directeur.** Une droite qui passe par deux points  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$ , avec  $x_A \neq x_B$ , a pour coefficient directeur

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Le nombre  $m$  mesure la variation de  $y$  lorsque  $x$  augmente d'une unité.

**Fonction et image.**  $f(a)$  est le nombre obtenu en remplaçant  $x$  par  $a$  dans la formule de  $f$ . Il faut distinguer  $f(a)$ , qui est une valeur, de  $f'(a)$ , qui mesure la variation instantanée au voisinage de  $a$ .

**Fractions et signes.** Pour un quotient, le dénominateur doit être non nul. Pour étudier le signe d'un produit ou d'un quotient, on repère le signe de chaque facteur avant de conclure.

### À retenir

Une étude de dérivation repose sur trois gestes : calculer correctement les images, manipuler les expressions sans perdre les signes, puis interpréter le résultat avec une unité ou une phrase.

## 2 1. Du taux de variation à la tangente

### 2.1 L'idée essentielle : mesurer une variation

Si une voiture parcourt 120 kilomètres en 2 heures, sa vitesse moyenne est

$$\frac{120}{2} = 60 \text{ km/h.}$$

On a comparé une variation de distance à une variation de temps. En mathématiques, le même geste permet de mesurer la variation moyenne d'une fonction.

Pour une fonction  $f$ , entre deux abscisses  $a$  et  $b$ , avec  $a \neq b$ , le **taux de variation** est

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Le numérateur est la variation de la sortie et le dénominateur la variation de l'entrée. Géométriquement, c'est le coefficient directeur de la sécante qui relie les points  $A(a; f(a))$  et  $B(b; f(b))$  de la courbe.

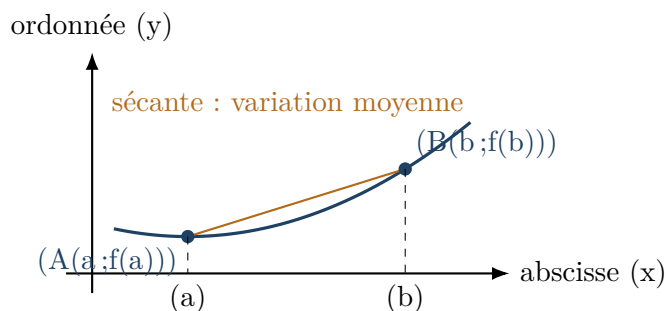


FIGURE 1 – Le taux de variation est la pente de la sécante entre deux points de la courbe.

### 2.2 Se rapprocher d'un point

Pour observer la variation de  $f$  au voisinage de  $a$ , on choisit un petit écart  $h \neq 0$ . Le second point a alors pour abscisse  $a + h$ . Le taux de variation entre  $a$  et  $a + h$  devient

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Lorsque  $h$  se rapproche de 0, le point  $a + h$  se rapproche de  $a$ . Les sécantes se rapprochent de la tangente à la courbe au point d'abscisse  $a$ . La valeur vers laquelle se rapprochent les taux de variation est le **nombre dérivé** de  $f$  en  $a$ , noté  $f'(a)$ , lorsque cette valeur existe :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Dans ce cours, cette écriture sert à donner du sens au nombre dérivé. Les calculs demandés restent des calculs sur des expressions simples ; il ne s'agit pas de formaliser la notion de limite.

#### Exemple entièrement détaillé

Pour  $f(x) = x^2$  et  $a = 3$ , calculons le taux de variation entre 3 et  $3 + h$ , puis le nombre dérivé.

$$\begin{aligned}
 f(3+h) &= (3+h)^2 = 9 + 6h + h^2, \\
 f(3) &= 3^2 = 9, \\
 \frac{f(3+h) - f(3)}{h} &= \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} \\
 &= \frac{6h + h^2}{h} \\
 &= 6 + h \quad h \neq 0.
 \end{aligned}$$

Quand  $h$  se rapproche de 0,  $6 + h$  se rapproche de 6. Ainsi

$$\boxed{f'(3) = 6.}$$

La pente de la courbe de  $x \mapsto x^2$  au point d'abscisse 3 est donc 6. Pour  $h = 0,1$ , la pente de la sécante vaut 6,1, déjà proche de 6.

### 2.3 La tangente

La tangente est la droite qui décrit la direction de la courbe au voisinage du point étudié. Elle passe par  $A(a; f(a))$  et son coefficient directeur est  $f'(a)$ . L'équation de la tangente est donc

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a).}$$

Il est important de conserver la forme  $x - a$  : elle montre que la droite contient bien le point d'abscisse  $a$ .

#### Exemple entièrement détaillé

Soit  $f(x) = x^2 - 3x + 1$ . Déterminons la tangente à la courbe au point d'abscisse 2.

1. L'ordonnée du point est

$$f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 4 - 6 + 1 = -1.$$

Le point est donc  $A(2; -1)$ .

2. La dérivée de  $f$  sera calculée dans la section suivante :  $f'(x) = 2x - 3$ . Ainsi

$$f'(2) = 2 \times 2 - 3 = 1.$$

3. On utilise la formule de la tangente :

$$\begin{aligned}
 y &= f(2) + f'(2)(x - 2) \\
 &= -1 + 1(x - 2) \\
 &= x - 3.
 \end{aligned}$$

La tangente cherchée est donc  $\boxed{y = x - 3}$ . Elle passe bien par  $A(2; -1)$ , car  $2 - 3 = -1$ , et sa pente vaut bien 1.

## 2.4 Interpréter un nombre dérivé

Le nombre dérivé dépend des unités. Si  $t$  est en secondes et  $d(t)$  en mètres, alors  $d'(t)$  est en mètres par seconde : il représente une vitesse instantanée. Si  $C(q)$  est un coût en euros pour une quantité  $q$ , alors  $C'(q)$  s'interprète comme un coût marginal, en euros par unité, dans le modèle étudié.

### À retenir

Le taux de variation est une pente moyenne entre deux points. Le nombre dérivé  $f'(a)$  est la pente instantanée au point d'abscisse  $a$ . La tangente en ce point a pour équation  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ .

## 3 2. La fonction dérivée et les règles de calcul

### 3.1 Du nombre dérivé à la fonction dérivée

Une fonction  $f$  est dérivable sur un intervalle si elle possède un nombre dérivé en chaque point de cet intervalle. On peut alors définir une nouvelle fonction, appelée **fonction dérivée** et notée  $f'$ , qui associe à  $x$  le nombre dérivé  $f'(x)$ .

Il faut distinguer :

- $f(x)$ , l'image de  $x$  par la fonction étudiée ;
- $f'(x)$ , la pente de la courbe de  $f$  à l'abscisse  $x$  ;
- $f'(a)$ , un nombre particulier obtenu en remplaçant  $x$  par  $a$  dans la formule de  $f'$ .

### 3.2 Dérivées des fonctions de référence

Dans le tableau,  $n$  est un entier relatif lorsque la formule contient  $x^n$ , et les expressions sont considérées là où elles sont définies.

| Fonction $f(x)$        | Dérivée $f'(x)$       | Conditions et remarque                                   |
|------------------------|-----------------------|----------------------------------------------------------|
| constante $c$          | 0                     | Une constante ne varie pas.                              |
| $x$                    | 1                     | Une droite de pente 1.                                   |
| $x^2$                  | $2x$                  | Formule obtenue à partir du taux de variation.           |
| $x^n$                  | $nx^{n-1}$            | Pour $n \in \mathbb{Z}$ , là où la fonction est définie. |
| $\frac{1}{x} = x^{-1}$ | $-\frac{1}{x^2}$      | Pour $x \neq 0$ .                                        |
| $\sqrt{x}$             | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | Pour $x > 0$ ; la fonction n'est pas dérivable en 0.     |
| $e^x$                  | $e^x$                 | Pour tout réel $x$ .                                     |

La fonction valeur absolue est un cas à connaître :  $x \mapsto |x|$  est dérivable pour  $x \neq 0$ , avec dérivée  $-1$  si  $x < 0$  et  $1$  si  $x > 0$ , mais elle n'est pas dérivable en 0. Son graphe forme un angle en ce point, ce qui empêche d'avoir une tangente unique.

### 3.3 Opérations sur les dérivées

Si  $u$  et  $v$  sont dérivables sur un intervalle, alors :

$$\begin{aligned}
 (u + v)' &= u' + v', \\
 (ku)' &= ku' \quad (k \text{ constant}), \\
 (uv)' &= u'v + uv', \\
 \left(\frac{1}{v}\right)' &= -\frac{v'}{v^2} \quad (v \neq 0), \\
 \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).
 \end{aligned}$$

En première, on utilise en particulier la dérivée d'une expression de la forme  $g(ax + b)$ , où  $a$  et  $b$  sont constants :

$$(g(ax + b))' = a g'(ax + b).$$

La dérivée de la fonction intérieure  $x \mapsto ax + b$  est  $a$ . La règle générale des fonctions composées sera étudiée dans le chapitre 08.

### Méthode

Pour dériver une expression :

1. repérer la forme de chaque terme et son domaine ;
2. découper l'expression en somme, produit ou quotient ;
3. appliquer une seule règle à la fois en introduisant  $u$  et  $v$  si cela rend les calculs plus lisibles ;
4. réduire et, si possible, factoriser la dérivée pour en étudier le signe.

### Exemple entièrement détaillé

Calculons la dérivée de

$$f(x) = (2x - 1)(x^2 + 3).$$

On pose  $u(x) = 2x - 1$  et  $v(x) = x^2 + 3$ . Alors

$$u'(x) = 2, \quad v'(x) = 2x.$$

La règle du produit donne

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 2(x^2 + 3) + (2x - 1)(2x) \\ &= 2x^2 + 6 + 4x^2 - 2x \\ &= 6x^2 - 2x + 6. \end{aligned}$$

Ainsi  $\boxed{f'(x) = 6x^2 - 2x + 6}$ . Il est possible de développer d'abord  $f$ , mais la règle du produit évite parfois une étape.

### Exemple entièrement détaillé

Calculons la dérivée de

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 2}.$$

Le domaine est  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ . Avec  $u = x^2 + 1$  et  $v = x - 2$ ,  $u' = 2x$  et  $v' = 1$ . La règle du quotient donne

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2x(x - 2) - (x^2 + 1) \times 1}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 4x - x^2 - 1}{(x - 2)^2} \\ &= \boxed{\frac{x^2 - 4x - 1}{(x - 2)^2}}. \end{aligned}$$

Le dénominateur est positif pour  $x \neq 2$ . Pour le signe de  $g'$ , il restera donc à étudier le numérateur  $x^2 - 4x - 1$ .

#### À retenir

Pour une dérivée, ne jamais dériver un produit ou un quotient comme si chaque facteur était indépendant de l'autre. Pour un produit, utiliser  $u'v + uv'$ . Pour un quotient, utiliser  $(u'v - uv')/v^2$ .

## 4 3. Du signe de la dérivée aux variations

### 4.1 Le lien fondamental

Sur un intervalle, le signe de  $f'$  indique le sens de variation de  $f$  :

- si  $f'(x) > 0$  sur l'intervalle, alors  $f$  est strictement croissante ;
- si  $f'(x) < 0$  sur l'intervalle, alors  $f$  est strictement décroissante ;
- si  $f'(x) = 0$  sur tout l'intervalle, alors  $f$  est constante.

Aux points où  $f'(x) = 0$ , la courbe possède une tangente horizontale. Un tel point est un candidat à un extremum, mais il faut regarder le changement de signe de  $f'$  :

- + puis - : maximum local ;
- - puis + : minimum local ;
- pas de changement de signe : pas d'extremum local par ce critère.

#### Exemple entièrement détaillé

Étudions les variations de  $f(x) = x^3 - 3x$  sur  $\mathbb{R}$ .

##### Étape 1 – dérivée.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1).$$

**Étape 2 – zéros et signe.** Les zéros de  $f'$  sont  $-1$  et  $1$ . Comme  $3 > 0$ , le signe de  $f'$  est celui de  $(x - 1)(x + 1)$  : positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles.

| $x$     | $] -\infty, -1[$ | $-1$    | $] -1, 1[$ | $1$     | $] 1, +\infty[$ |
|---------|------------------|---------|------------|---------|-----------------|
| $f'(x)$ | (+)              | (0)     | (-)        | (0)     | (+)             |
| $f$     | $\nearrow$       | maximum | $\searrow$ | minimum | $\nearrow$      |

##### Étape 3 – valeurs aux points remarquables.

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2, \quad f(1) = 1 - 3 = -2.$$

La fonction atteint donc un maximum local égal à 2 en  $-1$ , puis un minimum local égal à  $-2$  en 1.

### 4.2 Construire un tableau de variations

Un tableau de variations lisible comporte :

1. l'ensemble de définition et les bornes de l'intervalle étudié ;
2. les valeurs qui annulent la dérivée ou qui séparent le domaine ;
3. le signe de  $f'$  ;
4. les flèches de variation de  $f$  et les valeurs utiles de  $f$ .

Les limites aux bornes, lorsqu'elles ont déjà été étudiées, complètent le tableau. Une valeur  $f'(a) = 0$  ne suffit pas à conclure à un maximum ou à un minimum.

### 4.3 Établir une inégalité avec une variation

Pour montrer que  $f(x) \geq f(a)$  pour tout  $x$  dans un intervalle, on peut montrer que  $f$  possède un minimum en  $a$ . On étudie alors les variations avec  $f'$ , puis on traduit le résultat en inégalité.

#### Exemple entièrement détaillé

Montrons que, pour tout réel  $x$ ,

$$x^2 - 4x + 7 \geq 3.$$

On pose  $f(x) = x^2 - 4x + 7$ . Alors

$$f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2).$$

La dérivée est négative si  $x < 2$ , nulle en 2, positive si  $x > 2$ . La fonction décroît puis croît : elle atteint donc son minimum en 2. Sa valeur minimale est

$$f(2) = 4 - 8 + 7 = 3.$$

On en déduit bien, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$x^2 - 4x + 7 \geq 3.$$

Cette démarche revient ici à la forme canonique  $x^2 - 4x + 7 = (x - 2)^2 + 3$ , mais elle prépare les inégalités où la forme canonique n'est pas disponible.

### 4.4 Comparer deux courbes

Pour comparer  $f(x)$  et  $g(x)$ , on étudie souvent la fonction différence

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

Alors :

- $h(x) > 0$  signifie  $f(x) > g(x)$ , donc la courbe de  $f$  est au-dessus de celle de  $g$  ;
- $h(x) = 0$  donne les abscisses des points d'intersection ;
- $h(x) < 0$  signifie que la courbe de  $f$  est en dessous.

#### À retenir

Pour étudier les variations : calculer  $f'$ , résoudre  $f'(x) = 0$ , établir son signe, puis lire les flèches.  
Pour conclure sur un extremum, vérifier le changement de signe et calculer la valeur de  $f$ .

## 5 4. Optimisation et modèles de variation

### 5.1 Une démarche en quatre étapes

Un problème d'optimisation demande de rendre une quantité aussi grande ou aussi petite que possible. La méthode est :

1. choisir la variable et préciser son unité ;
2. exprimer la quantité à optimiser par une fonction  $f$  ;
3. déterminer le domaine imposé par la situation ;
4. étudier les variations de  $f$ , puis interpréter l'extremum avec les unités et les contraintes du problème.

#### Exemple entièrement détaillé

On dispose de 20 mètres de grillage pour construire un enclos rectangulaire adossé à un mur. Le mur constitue un côté : on ne grille donc que les deux largeurs et la longueur opposée au mur. Quelles dimensions donnent l'aire maximale ?

**Modélisation.** Soit  $x$  la largeur, en mètres, et  $y$  la longueur grillée opposée au mur. La quantité de grillage impose

$$2x + y = 20, \quad \text{donc} \quad y = 20 - 2x.$$

Les longueurs doivent être positives :  $0 < x < 10$ . L'aire vaut

$$A(x) = x \times y = x(20 - 2x) = 20x - 2x^2.$$

**Étude des variations.** On dérive :

$$A'(x) = 20 - 4x = 4(5 - x).$$

Sur  $]0, 5[$ ,  $A'(x) > 0$  ; en 5,  $A'(5) = 0$  ; sur  $]5, 10[$ ,  $A'(x) < 0$ . L'aire augmente puis diminue : elle est maximale pour  $x = 5$ .

**Interprétation.** La longueur opposée au mur vaut

$$y = 20 - 2 \times 5 = 10 \text{ m},$$

et l'aire maximale est

$$A(5) = 5 \times 10 = 50 \text{ m}^2.$$

**Réponse :** il faut une largeur de 5 m et une longueur de 10 m ; l'aire maximale est  $50 \text{ m}^2$ .

### 5.2 La fonction exponentielle comme modèle

La fonction exponentielle est notée  $x \mapsto e^x$ . Elle est strictement positive et vérifie

$$(e^x)' = e^x.$$

Comme  $e^x > 0$  pour tout  $x$ , elle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Pour un réel  $k$ , la fonction  $x \mapsto e^{kx}$  a pour dérivée

$$(e^{kx})' = ke^{kx}.$$

Ainsi  $e^{-kx}$  est décroissante lorsque  $k > 0$ . Cela permet de modéliser une croissance ou une décroissance continue.

#### Exemple entièrement détaillé

Une quantité  $Q(t)$ , en grammes, est modélisée par

$$Q(t) = 800e^{-0,12t},$$

où  $t$  est exprimé en heures. Sa vitesse de variation est

$$Q'(t) = 800 \times (-0,12)e^{-0,12t} = -96e^{-0,12t} \text{ g/h.}$$

Comme l'exponentielle est positive,  $Q'(t) < 0$  : la quantité diminue à tout instant. À  $t = 5$ ,

$$Q'(5) = -96e^{-0,6} \approx -52,7 \text{ g/h.}$$

Le signe négatif indique une diminution ; sa valeur absolue représente la vitesse de diminution à cet instant.

**À retenir**

Dans un modèle, le signe de la dérivée donne le sens de l'évolution. Une dérivée négative n'est pas une « mauvaise réponse » : elle signifie que la quantité diminue. Toujours conserver les unités dans la phrase finale.

## 6 Exercices gradués

Les exercices sont classés du plus guidé au plus autonome. Pour chacun, identifier d'abord la compétence travaillée et écrire les calculs utiles. Les corrections détaillées sont dans `corrections.pdf`.

### Exercice 1 – Taux de variation et sécante

Soit  $f(x) = x^2 - 2x$ .

- Calculer  $f(1)$  et  $f(3)$ .
- Calculer le taux de variation de  $f$  entre 1 et 3.
- Donner une interprétation graphique de ce nombre.

*Indice.*

Utiliser  $(f(3) - f(1))/(3 - 1)$ . Le nombre obtenu est une pente.

### Exercice 2 – Nombre dérivé à partir de la définition

Soit  $f(x) = x^2 + 2x$ . Calculer le taux de variation entre  $a$  et  $a + h$ , pour  $h \neq 0$ , puis en déduire  $f'(a)$ . Calculer enfin  $f'(2)$ .

*Indice.*

Développer  $(a + h)^2 + 2(a + h)$ , soustraire  $f(a)$ , puis simplifier par  $h$ .

### Exercice 3 – Équation d'une tangente

Soit  $g(x) = x^2 - 4x + 1$ . Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de  $g$  au point d'abscisse 3.

*Indice.*

Calculer  $g(3)$ , puis  $g'(3)$ , et utiliser  $y = g(3) + g'(3)(x - 3)$ .

### Exercice 4 – Calculer une fonction dérivée

Calculer les dérivées et préciser les valeurs interdites lorsque c'est nécessaire :

- $u(x) = 4x^3 - 5x + 7$  ;
- $v(x) = (x + 1)(x^2 - 2)$  ;
- $w(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$  ;
- $z(x) = \sqrt{x} + e^{2x}$ , sur  $]0, +\infty[$ .

*Indice.*

Pour  $v$  utiliser le produit ; pour  $w$  le quotient ; pour  $e^{2x}$ , multiplier par la dérivée de  $2x$ .

### Exercice 5 – Valeur absolue et dérivabilité

On considère  $f(x) = |x|$ .

- Donner une expression de  $f$  sur  $] - \infty, 0[$  et sur  $]0, +\infty[$ .
- Calculer la dérivée sur chacun de ces intervalles.
- Expliquer pourquoi  $f$  n'est pas dérivable en 0, en comparant les pentes à gauche et à droite.

*Indice.*

À gauche de 0,  $|x| = -x$ ; à droite,  $|x| = x$ . Les deux pentes latérales ne coïncident pas.

### Exercice 6 – Variations et extremum

Étudier les variations de  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$  sur  $\mathbb{R}$ . Donner les éventuels extrema locaux.

*Indice.*

Factoriser  $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$ , dresser le tableau de signe, puis calculer les valeurs de  $f$  en 1 et 3.

### Exercice 7 – Une inégalité par les variations

Démontrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$x^4 + 2x^2 + 3 \geq 3.$$

On pourra étudier la fonction  $f(x) = x^4 + 2x^2 + 3$ .

*Indice.*

Sa dérivée est  $4x(x^2 + 1)$ . Le facteur  $x^2 + 1$  est toujours positif.

### Exercice 8 – Optimisation géométrique

Un rectangle a un périmètre de 36 cm. On note  $x$  la longueur d'un côté, en cm.

- Déterminer l'intervalle possible pour  $x$ , puis exprimer l'autre côté en fonction de  $x$ .
- Exprimer l'aire  $A(x)$ .
- Étudier les variations de  $A$  et déterminer les dimensions du rectangle d'aire maximale.

*Indice.*

Le périmètre donne  $2x + 2y = 36$ , donc  $y = 18 - x$ . L'aire est une fonction quadratique sur  $]0, 18[$ .

### Exercice 9 – Modèle de décroissance

La température  $T(t)$ , en degrés Celsius, d'un objet est modélisée pour  $t \geq 0$  par

$$T(t) = 20 + 80e^{-0,25t},$$

où  $t$  est le temps en minutes.

- Calculer  $T'(t)$  et justifier que la température diminue.
- Calculer la vitesse de refroidissement à  $t = 4$ , arrondie au dixième.
- Expliquer ce que devient la température lorsque  $t$  devient très grand.

*Indice.*

La dérivée de  $e^{-0,25t}$  est  $-0,25e^{-0,25t}$ . Pour la dernière question, utiliser la limite usuelle de l'exponentielle.

### Exercice 10 – Problème de synthèse : coût et recette

Une petite entreprise vend  $x$  centaines d'objets, avec  $0 \leq x \leq 8$ . Le bénéfice, en milliers d'euros, est modélisé par

$$B(x) = -x^3 + 9x^2 + 12x - 20.$$

- a) Calculer  $B'(x)$  et factoriser cette dérivée.
- b) Étudier les variations de  $B$  sur  $[0, 8]$ .
- c) Déterminer le nombre de centaines d'objets qui donne le bénéfice maximal et calculer ce bénéfice.
- d) Rédiger une phrase de réponse avec les unités. Expliquer pourquoi une étude de la dérivée est plus informative qu'un simple calcul de quelques valeurs.

*Indice.*

On obtient  $B'(x) = -3(x - (3 + \sqrt{13}))(x - (3 - \sqrt{13}))$  après recherche des racines de  $-3x^2 + 18x + 12$ . Étudier aussi les bornes de l'intervalle.

## 7 Bilan, erreurs fréquentes et rappel différé

### 7.1 Bilan à relire avant un exercice

1. Un taux de variation entre  $a$  et  $b$  est  $(f(b) - f(a))/(b - a)$ .
2. Le nombre dérivé  $f'(a)$  est la limite des taux de variation quand le second point se rapproche de  $a$ . Il représente la pente de la tangente.
3. La tangente en  $a$  a pour équation  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ .
4. Pour étudier les variations, calculer le signe de  $f'$ , pas seulement les valeurs de  $f$ .
5. Un zéro de  $f'$  est un candidat à un extremum ; le changement de signe permet de conclure.
6. Dans un problème concret, préciser la variable, le domaine et les unités.

### 7.2 Erreurs fréquentes à analyser

- Écrire  $f'(a) = f(a)$  : la dérivée et la fonction ne donnent pas la même information.
- Écrire  $(uv)' = u'v'$  : la bonne formule est  $(u'v + uv')$ .
- Oublier le carré du dénominateur dans la dérivée d'un quotient.
- Conclure « maximum » dès que  $f'(a) = 0$ , sans examiner le signe autour de  $a$ .
- Donner une valeur numérique sans unité ou sans phrase d'interprétation.
- Utiliser  $\sqrt{x}' = 1/(2\sqrt{x})$  en  $x = 0$  : cette formule ne donne pas une dérivée en 0, et la fonction racine n'y est pas dérivable.

### 7.3 Auto-évaluation

Cocher une compétence seulement si elle peut être expliquée et appliquée sur un exemple nouveau :

| Compétence                                                    | Je débute | Je m'entraîne | Je sais expliquer |
|---------------------------------------------------------------|-----------|---------------|-------------------|
| Calculer un taux de variation et l'interpréter                |           |               |                   |
| Calculer une tangente à partir de $f(a)$ et $f'(a)$           |           |               |                   |
| Utiliser une règle de dérivation sans perdre les parenthèses  |           |               |                   |
| Dresser un tableau de variations à partir de $f'$             |           |               |                   |
| Résoudre un problème d'optimisation et interpréter la réponse |           |               |                   |

### 7.4 Rappel différé

À refaire quelques jours plus tard, sans relire le cours auparavant :

- R1.** Pour  $f(x) = x^2$ , expliquer avec un calcul pourquoi  $f'(a) = 2a$ .
- R2.** Déterminer l'équation de la tangente à  $y = e^x$  en  $x = 0$ .
- R3.** Étudier les variations de  $g(x) = x^2 - 6x + 5$ .

**R4.** Un rectangle de périmètre fixé a-t-il toujours une aire maximale ? Décrire la démarche, même sans refaire tous les calculs.

**À retenir**

En cas de blocage, revenir à trois questions : quelle quantité varie ? Quelle est la fonction qui la décrit ? Le signe de sa dérivée que dit-il de son évolution ?