

Fiche d'histoire mathématique

Mesurer une variation

Des tangentes aux fonctions dérivées

Idée directrice. La dérivée répond à deux questions qui semblaient différentes : quelle est la pente d'une courbe à un point, et comment une grandeur varie-t-elle instantanément ? Son histoire est liée à la géométrie, à la mécanique et à l'optimisation.

Table des matières

1	Le problème des tangentes	1
2	Fermat, les maxima et les minima	1
3	Newton et Leibniz	2
4	Lagrange et Cauchy : vers une théorie des fonctions	2
5	Ce que l'histoire éclaire dans le cours	2
6	Pour aller plus loin	3

1 Le problème des tangentes

Les géomètres grecs savent déterminer des tangentes à certaines courbes, mais ils disposent surtout de constructions particulières. Pour un cercle, la tangente est perpendiculaire au rayon ; pour une courbe quelconque, il faut comprendre ce que signifie sa direction en un point.

Une première idée consiste à prendre la pente de la sécante qui relie deux points, puis à rapprocher le second point du premier. Le taux de variation

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

devient alors, lorsqu'il admet une limite, la pente de la tangente.

2 Fermat, les maxima et les minima

Dans les années 1630, Pierre de Fermat cherche des tangentes et des extrema. Pour repérer un maximum ou un minimum, il compare la valeur en x à celle en $x+h$, puis fait disparaître le petit accroissement après avoir identifié le terme dominant. Sa méthode, appelée parfois *adequality*, contient l'idée du nombre dérivé.

Le lien avec l'optimisation est immédiat : au sommet lisse d'une courbe, la tangente est horizontale, donc la dérivée est nulle. Cette condition ne suffit pas à elle seule pour conclure, mais elle fournit un candidat qu'il faut ensuite étudier.

3 Newton et Leibniz

Au XVII^e siècle, Isaac Newton développe la méthode des fluxions pour décrire des quantités qui évoluent dans le temps. La dérivée de la position devient la vitesse, puis la dérivée de la vitesse devient l'accélération.

Gottfried Wilhelm Leibniz construit une autre présentation. Il introduit les différentielles dx et dy , puis la notation $\frac{dy}{dx}$. Cette notation rappelle le rapport de deux variations et se combine très bien avec les changements de variable et les fonctions composées.

Newton et Leibniz ont travaillé dans des cadres différents et une longue controverse de priorité a suivi. L'histoire actuelle insiste plutôt sur le fait que le calcul infinitésimal est le résultat d'un travail collectif, nourri par Fermat, Barrow, Newton, Leibniz et les frères Bernoulli.

4 Lagrange et Cauchy : vers une théorie des fonctions

Au XVIII^e siècle, Euler utilise le calcul différentiel dans les fonctions, la mécanique et les équations différentielles. Lagrange cherche à présenter le calcul à partir de développements en séries et systématise la notation $f'(x)$.

Au XIX^e siècle, Cauchy fonde la dérivée sur la notion de limite. La dérivée n'est plus un mystérieux « quotient d'infiniment petits » : elle est la limite, si elle existe, des taux de variation. Cette définition permet de distinguer une intuition correcte d'une justification complète.

Repère	Apport
Antiquité	Tangentes à des courbes particulières.
Années 1630	Fermat relie tangentes, maxima et minima.
1660–1680	Newton et Leibniz construisent le calcul infinitésimal.
XVIII ^e –XIX ^e siècles	Euler, Lagrange et Cauchy organisent la théorie des fonctions et des limites.

5 Ce que l'histoire éclaire dans le cours

- Le taux de variation compare deux points ; le nombre dérivé décrit la tendance au voisinage d'un seul point.
- Une dérivée est une pente, mais aussi une vitesse instantanée ou une sensibilité dans un modèle.
- Le signe de la dérivée permet de passer d'une information locale à un tableau de variations.
- Une optimisation complète comporte une modélisation, des candidats et une interprétation du résultat.

À retenir. La dérivation n'est pas une recette de symboles. Elle est née d'un problème concret : remplacer une courbe par sa direction locale afin de comprendre un mouvement, une croissance ou un maximum.

6 Pour aller plus loin

- MacTutor, histoire générale du calcul : The rise of calculus.
- MacTutor, Fermat et les tangentes, maxima et minima : notice historique de Fermat.
- MacTutor, notations du calcul différentiel : symbols of calculus.