

## Baccalauréat général – spécialité mathématiques

# Corrections expliquées

## Compléments sur la dérivation

À consulter après une première recherche personnelle

**Utilisation.** Cherche d’abord dans le fascicule du cours. Lis son indice si tu es bloquée, puis compare ta démarche avec la correction complète. Une réponse formulée autrement peut être correcte si elle respecte les données et si elle est justifiée. Les exercices sont des créations pédagogiques ; ils ne sont pas présentés comme des sujets officiels du baccalauréat.

**Rappel de méthode.** Dans une composée  $v(u(x))$ , identifier l’intérieur  $u$  avant de dériver. Pour la convexité, calculer  $f''$  et étudier son signe sur chaque intervalle. Pour un point d’inflexion, vérifier un changement de signe et donner le point complet  $(a; f(a))$ .

## Table des matières

|          |                                                                       |           |
|----------|-----------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Diagnostic : réponses et rappels ciblés</b>                        | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Corrections des exercices 1 à 3 : compositions</b>                 | <b>5</b>  |
| <b>3</b> | <b>Corrections des exercices 4 à 7 : dérivée seconde et convexité</b> | <b>6</b>  |
| <b>4</b> | <b>Corrections des exercices 8 à 10 : lecture et synthèse</b>         | <b>8</b>  |
| <b>5</b> | <b>Corrections du rappel différé</b>                                  | <b>10</b> |

## 1 Diagnostic : réponses et rappels ciblés

### Correction D1

$$(v \circ u)(2) = v(u(2)) = v(5) = 5^2 = 25.$$

Dans l'autre ordre,

$$(u \circ v)(2) = u(v(2)) = u(4) = 2 \times 4 + 1 = 9.$$

Les deux résultats sont différents parce que les transformations ne sont pas appliquées dans le même ordre.

### Correction D2

Dans  $f(x) = (3x - 1)^4$ , la fonction intérieure est

$$u(x) = 3x - 1,$$

et la fonction extérieure est  $v(t) = t^4$ . On a donc  $f = v \circ u$ .

### Correction D3

$$f'(x) = 3x^2 - 4x, \quad f''(x) = 6x - 4.$$

La seconde dérivée s'obtient en dérivant la première.

### Correction D4

$$6x - 12 = 6(x - 2).$$

Comme  $6 > 0$ , l'expression est négative si  $x < 2$ , nulle si  $x = 2$ , et positive si  $x > 2$ .

### Correction D5

Une courbe située sous les cordes qui relient deux de ses points est une courbe **convexe**. Pour une courbe concave, la courbe est au-dessus de ces cordes.

### Correction D6

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x.$$

La dérivée seconde est négative si  $x < 0$  et positive si  $x > 0$ . La courbe est donc concave sur  $] -\infty, 0[$  et convexe sur  $]0, +\infty[$ .

### Correction D7

Non. L'égalité  $f''(1) = 0$  donne seulement un candidat. Il faut vérifier que le signe de  $f''$  change de part et d'autre de 1. Sans changement de convexité, il n'y a pas de point d'inflexion.

### Correction D8

Pour  $f(x) = x^2$ ,

$$f(1) = 1, \quad f'(x) = 2x, \quad f'(1) = 2.$$

La tangente en 1 est

$$\begin{aligned}y &= f(1) + f'(1)(x - 1) \\&= 1 + 2(x - 1) \\&= \boxed{2x - 1}.\end{aligned}$$

**Point de méthode**

Le diagnostic vérifie l'ordre d'une composition, le calcul de deux dérivées et la lecture des signes. Pour la convexité, toujours distinguer «  $f''$  s'annule » de «  $f''$  change de signe ».

## 2 Corrections des exercices 1 à 3 : compositions

### Correction 1 – Ordre d'une composition

a) On applique  $u$ , puis  $v$  :

$$(v \circ u)(x) = v(x+2) = 3(x+2)^2.$$

Dans l'autre ordre :

$$(u \circ v)(x) = u(3x^2) = 3x^2 + 2.$$

b) Pour  $x = 1$ ,

$$(v \circ u)(1) = 3(1+2)^2 = 3 \times 9 = 27,$$

tandis que

$$(u \circ v)(1) = 3 \times 1^2 + 2 = 5.$$

c) Dans  $v \circ u$ , la sortie de  $u$  devient l'entrée de  $v$ . Dans  $u \circ v$ , c'est l'inverse. Les expressions  $3(x+2)^2$  et  $3x^2 + 2$  ne sont pas les mêmes : l'ordre compte.

### Correction 2 – Règle de la chaîne

a) Pour  $f(x) = (4x+1)^3$ , l'intérieur a pour dérivée 4 :

$$f'(x) = 3(4x+1)^2 \times 4 = 12(4x+1)^2.$$

La fonction est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

b) Pour  $g(x) = e^{2x-5}$ ,

$$g'(x) = 2e^{2x-5}.$$

Le domaine est  $\mathbb{R}$ .

c) La racine impose  $5-x \geq 0$ , donc la fonction est définie sur  $] -\infty, 5]$ . Elle est dérivable lorsque  $5-x > 0$ , c'est-à-dire sur  $] -\infty, 5[$ . La règle de la chaîne donne

$$h'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{5-x}}.$$

La fonction n'est pas dérivable en  $x = 5$ .

### Correction 3 – Domaine et composée

a) Comme la racine est au dénominateur, il faut

$$2x-3 > 0 \iff x > \frac{3}{2}.$$

Ainsi  $\mathcal{D}_f = ]\frac{3}{2}, +\infty[$ .

b) On écrit  $f(x) = (2x-3)^{-1/2}$ . La règle de la chaîne donne

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2}(2x-3)^{-3/2} \times 2 \\ &= -\frac{1}{(2x-3)^{3/2}}. \end{aligned}$$

c) Sur le domaine,  $(2x-3)^{3/2} > 0$ . Donc  $f'(x) < 0$ . Le résultat confirme que  $f$  est décroissante, ce qui est cohérent avec une quantité positive  $1/\sqrt{2x-3}$  qui diminue quand  $x$  augmente.

### 3 Corrections des exercices 4 à 7 : dérivée seconde et convexité

#### Correction 4 – Dérivée seconde

$$\begin{aligned}f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 + 4x, \\f''(x) &= 12x^2 - 24x + 4 \\&= 4(3x^2 - 6x + 1).\end{aligned}$$

Les racines de  $3x^2 - 6x + 1$  sont

$$x_1 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad x_2 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Le coefficient de  $x^2$  étant positif,  $f''$  est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles. Ainsi  $f$  est convexe sur

$$\left] -\infty, 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \right[ \quad \text{et} \quad \left] 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}, +\infty \right[ ,$$

et concave sur

$$\left] 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \right[ .$$

#### Correction 5 – Convexité à partir de $f''$

On calcule

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9, \quad f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1).$$

Le signe de  $f''$  est négatif si  $x < 1$ , nul en 1, positif si  $x > 1$ . La fonction est donc concave sur  $] -\infty, 1[$ , puis convexe sur  $]1, +\infty[$ . Le signe change en 1, donc il y a un point d'inflexion. Son ordonnée vaut

$$f(1) = 1 - 3 - 9 + 1 = -10.$$

Le point d'inflexion est

$$\boxed{I(1; -10)}.$$

#### Correction 6 – Inégalité par une tangente

Pour  $f(x) = e^x$ ,

$$f''(x) = e^x > 0.$$

La fonction est convexe sur  $\mathbb{R}$ . En 0,

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1.$$

La tangente est donc

$$T_0(x) = 1 + x.$$

La courbe d'une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes :

$$\boxed{e^x \geq 1 + x}.$$

L'égalité a lieu au point de tangence, c'est-à-dire pour  $x = 0$ .

#### Correction 7 – Un point d'inflexion ou non ?

**Fonction**  $f(x) = x^3$ . On a  $f''(x) = 6x$ , négatif à gauche de 0, positif à droite. Il y a changement de convexité :

$(0; 0)$  est un point d'inflexion.

**Fonction**  $g(x) = x^4$ . On a  $g''(x) = 12x^2$ , positif des deux côtés de 0. La courbe reste convexe :

$(0; 0)$  n'est pas un point d'inflexion.

**Fonction**  $h(x) = -x^3$ . On a  $h''(x) = -6x$ , positif à gauche de 0, négatif à droite. La courbure change :

$(0; 0)$  est un point d'inflexion.

## 4 Corrections des exercices 8 à 10 : lecture et synthèse

### Correction 8 – Lire un tableau de signes

a) D'après le signe de  $f'$ , la fonction décroît sur  $] -\infty, -2[$ , puis croît sur  $] -2, +\infty[$ . Elle atteint donc un minimum local en  $x = -2$ . La valeur de ce minimum ne peut pas être calculée sans connaître  $f(-2)$ .

b) D'après le signe de  $f''$ , la fonction est convexe sur  $] -\infty, 1[$  et concave sur  $]1, +\infty[$ .

c) En  $x = -2$ ,  $f'$  passe de négatif à positif : la courbe possède un minimum local et une tangente horizontale. Il n'y a pas de changement de convexité indiqué à cet endroit.

En  $x = 1$ ,  $f''$  passe de positif à négatif : la courbe possède un point d'inflexion, de coordonnées  $(1; f(1))$ . Comme  $f'(1) > 0$ , la tangente à ce point n'est pas horizontale.

### Correction 9 – Étude complète d'une fonction

On étudie  $f(x) = (x-1)e^{-x}$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Limites.** On utilise la croissance comparée de l'exponentielle :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{-x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{-x} = 0.$$

La courbe admet donc l'asymptote horizontale  $y = 0$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

**Variations.** La dérivée est

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} + (x-1)(-e^{-x}) \\ &= e^{-x}(2-x). \end{aligned}$$

Comme  $e^{-x} > 0$ ,  $f'$  est positive si  $x < 2$ , nulle en 2, négative si  $x > 2$ . La fonction croît puis décroît. Elle atteint un maximum en 2, de valeur

$$f(2) = e^{-2}.$$

**Convexité.** On dérive  $f'$  :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -e^{-x}(2-x) - e^{-x} \\ &= e^{-x}(x-3). \end{aligned}$$

Le signe change en 3 :  $f$  est concave sur  $] -\infty, 3[$ , convexe sur  $]3, +\infty[$ . Le point d'inflexion est

$$\boxed{I(3; f(3)) = I(3; 2e^{-3})}.$$

### Correction 10 – Inégalité avec la fonction inverse

Sur  $]0, +\infty[$ ,

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0.$$

La fonction est convexe. En  $x = 1$ ,

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = -1.$$

L'équation de la tangente est

$$T_1(x) = 1 - (x-1) = 2-x.$$

La courbe est au-dessus de cette tangente, donc

$$\boxed{\frac{1}{x} \geq 2 - x \quad \text{pour } x > 0.}$$

En ajoutant  $x$  aux deux membres, ce qui conserve le sens de l'inégalité car  $x > 0$ , on obtient

$$\boxed{x + \frac{1}{x} \geq 2.}$$

L'égalité a lieu pour  $x = 1$ .

## 5 Corrections du rappel différé

### Correction R1

La fonction est une composée :  $u(x) = x^2 + 1$ , puis  $v(t) = t^3$ . Donc

$$f'(x) = 3(x^2 + 1)^2 \times 2x$$

et

$$f'(x) = 6x(x^2 + 1)^2.$$

### Correction R2

$$g'(x) = 4x^3, \quad g''(x) = 12x^2.$$

Comme  $12x^2 \geq 0$  pour tout réel  $x$ , la fonction  $g(x) = x^4$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

### Correction R3

La fonction exponentielle vérifie  $f''(x) = e^x > 0$ , donc elle est convexe. La courbe est au-dessus de sa tangente en 0. Or cette tangente est  $y = 1 + x$ . On en déduit

$$e^x \geq 1 + x.$$

### Correction R4

Il faut calculer  $f''$ , résoudre l'équation  $f''(x) = 0$ , puis vérifier que le signe de  $f''$  change de part et d'autre de la valeur trouvée. Il faut ensuite donner les deux coordonnées du point  $(x; f(x))$ .

#### Point de méthode

Une correction de convexité doit faire apparaître l'intervalle, le signe de  $f''$ , la conclusion sur la courbe et, pour un point d'inflexion, l'ordonnée du point.