

Fiche d'histoire mathématique

Composer, courber, optimiser

De la règle de la chaîne à la convexité

Idée directrice. Une première dérivée mesure une variation. La dérivée seconde décrit comment cette variation elle-même change. Les notions de composition, de convexité et de point d'inflexion sont nées de la volonté de comprendre des formes et des phénomènes plus riches qu'une simple pente.

Table des matières

1	La composition : suivre plusieurs changements	1
2	La dérivée seconde et la courbure	1
3	Convexité : une idée géométrique	2
4	Taylor, inégalités et points d'inflexion	2
5	Des courbes aux modèles modernes	2
6	À retenir	2
7	Pour aller plus loin	3

1 La composition : suivre plusieurs changements

Les problèmes scientifiques emboîtent souvent plusieurs transformations : une distance dépend du temps, une température dépend de la distance, une énergie dépend de la température. La règle de la chaîne formalise ce parcours : si $y = f(u)$ et $u = g(x)$, alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

Le calcul différentiel de Leibniz a rendu cette écriture particulièrement naturelle. La notation rappelle qu'un changement global est composé de deux changements locaux, même si les symboles du ne sont pas des nombres que l'on simplifie sans précaution dans toutes les situations.

2 La dérivée seconde et la courbure

Dans la mécanique de Newton, la dérivée de la position donne la vitesse et la dérivée seconde donne l'accélération. La dérivée seconde répond donc à une question concrète : la vitesse augmente-t-elle, diminue-t-elle ou reste-t-elle stable ?

Pour une courbe, le signe de f'' renseigne sur la manière dont les pentes évoluent. Une courbe peut monter tout en étant tournée vers le bas, ou descendre tout en étant tournée vers le haut. Cette distinction est devenue essentielle en mécanique, en géométrie différentielle et dans l'étude des approximations.

3 Convexité : une idée géométrique

Une fonction convexe est, intuitivement, une fonction dont la courbe reste sous ses cordes. Pour une fonction deux fois dérivable, le signe de f'' permet de reconnaître cette situation sur un intervalle.

L'idée géométrique est ancienne, mais l'analyse moderne lui donne des critères calculables. Au début du XX^e siècle, Johan Jensen établit une inégalité qui porte son nom et relie convexité, moyennes et inégalités. Elle généralise des faits que l'on peut déjà observer avec une parabole : la valeur au milieu est contrôlée par les valeurs aux extrémités.

4 Taylor, inégalités et points d'inflexion

Les développements en séries de Taylor, issus des travaux de Brook Taylor au XVIII^e siècle et prolongés par Maclaurin et d'autres, approchent une fonction par un polynôme construit avec ses dérivées. La dérivée seconde donne le premier terme qui renseigne sur la courbure.

Un point d'inflexion correspond à un changement de convexité. Le signe de la dérivée seconde est un outil important pour le détecter, mais l'annulation de f'' seule ne suffit pas : il faut étudier ce qui se passe de part et d'autre. Cette prudence est un exemple de la différence entre une condition nécessaire et une conclusion complète.

5 Des courbes aux modèles modernes

Les fonctions convexes sont aujourd'hui centrales en optimisation, en économie, en mécanique et en apprentissage automatique. Une fonction convexe possède des propriétés qui rendent la recherche d'un minimum plus fiable : un minimum local est aussi global dans de nombreuses situations.

Repère	Apport
XVII ^e siècle	Le calcul différentiel rend possible la règle des fonctions composées.
XVIII ^e siècle	Taylor et Euler utilisent dérivées et développements pour approximer.
XIX ^e siècle	La rigueur des limites clarifie dérivée seconde et courbure.
XX ^e siècle à aujourd'hui	Convexité et inégalités structurent l'optimisation.

6 À retenir

La dérivée seconde ne remplace pas l'étude de la fonction : elle donne une information supplémentaire sur l'évolution des pentes. La convexité transforme cette information locale en une

lecture globale de la courbe, tandis que la règle de la chaîne permet de suivre une variation composée.

7 Pour aller plus loin

- MacTutor, histoire générale du calcul infinitésimal : The rise of calculus.
- Pour les inégalités de Jensen et la convexité, consulter l'Encyclopaedia of Mathematics : convex functions.
- MacTutor, histoire des séries et des notations du calcul : symbols of calculus.