

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Corrections expliquées

Continuité des fonctions d'une variable réelle

À consulter après une première recherche personnelle

Utilisation. Cherche d'abord dans le fascicule du cours. Lis son indice si tu es bloquée, puis compare ta démarche avec la correction complète. Une rédaction différente peut être correcte si elle respecte les données et si elle est justifiée. Les exercices sont des créations pédagogiques ; ils ne sont pas présentés comme des sujets officiels du baccalauréat.

Rappel de méthode. Pour la continuité en a , comparer la valeur $f(a)$ et la limite en a . Pour une fonction usuelle, vérifier d'abord le domaine. Pour une équation $f(x) = k$, séparer l'existence, l'unicité et l'encadrement : ce sont trois conclusions différentes. Pour une suite récurrente, démontrer la convergence avant de résoudre l'équation de la limite.

Table des matières

1	Diagnostic : réponses et rappels ciblés	3
2	Corrections des exercices 1 à 3 : définition et continuité	5
3	Corrections des exercices 4 et 5 : valeurs intermédiaires	6
4	Corrections des exercices 6 à 8 : dichotomie et suites	7
5	Correction de l'exercice 9 : problème de température	9
6	Correction de l'exercice 10 : synthèse	10
7	Corrections du rappel différé	11

1 Diagnostic : réponses et rappels ciblés

Correction D1

On remplace x par 2 :

$$f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 4 - 6 + 1 = -1.$$

Correction D2

La racine impose $x + 1 \geq 0$, donc $x \geq -1$. Le dénominateur impose $x - 2 \neq 0$, donc $x \neq 2$. Ainsi,

$$\mathcal{D}_g = [-1, +\infty[\setminus \{2\}.$$

Correction D3

La fonction $x \mapsto 4x - 3$ est un polynôme, donc on peut remplacer x par 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (4x - 3) = 4 \times 1 - 3 = 1.$$

Correction D4

La formule contient $x - 2$ au dénominateur. Pour $x = 2$, elle donne une division par zéro : la formule ne définit donc pas $h(2)$. En revanche,

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

Pour $x \neq 2$, on pourra donc simplifier $h(x)$ en $x + 2$. Cette simplification ne crée pas une valeur de h en 2.

Correction D5

La fonction n'est pas définie en -3 , car le dénominateur vaut alors zéro. Elle est une fonction rationnelle, donc elle est continue là où son dénominateur ne s'annule, c'est-à-dire sur

$$]-\infty, -3[\quad \text{et} \quad]-3, +\infty[.$$

Correction D6

Comme $1/n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$,

$$u_n = 2 + \frac{1}{n} \longrightarrow 2 + 0 = \boxed{2}.$$

Correction D7

La fonction q est continue sur $[0; 1]$, et

$$q(0) = -2 < 0 < 3 = q(1).$$

Le nombre 0 est donc une valeur intermédiaire. Le théorème des valeurs intermédiaires garantit qu'il existe au moins un $c \in]0; 1[$ tel que

$$\boxed{q(c) = 0.}$$

On ne peut pas encore affirmer que ce c est unique.

Correction D8

« Il existe une solution » signifie qu'au moins un nombre convient. Il peut y en avoir plusieurs. « Il existe une unique solution » signifie qu'il y en a une et une seule. Pour passer de l'existence à l'unicité, il faut une information supplémentaire, par exemple une stricte monotonie.

Point de méthode

Le diagnostic vérifie quatre bases : calculer une image, déterminer un domaine, comprendre une limite et distinguer existence et unicité. Une erreur de calcul se corrige par les étapes numériques ; une erreur de méthode demande de revenir au théorème ou à la définition utilisée.

2 Corrections des exercices 1 à 3 : définition et continuité

Correction 1 – Valeur, limite et continuité

a) La deuxième ligne donne directement

$$\boxed{h(2) = 4.}$$

b) Pour x proche de 2, avec $x \neq 2$, on utilise $h(x) = x + 2$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

c) La fonction est définie en 2, et la limite vaut la valeur au point :

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = h(2) = 4.$$

Ainsi,

$$\boxed{h \text{ est continue en } 2.}$$

Correction 2 – Domaine et fonctions usuelles

a) f est un polynôme. Il est défini et continu sur tout $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}, \quad f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

b) Pour g , le dénominateur impose $x - 4 \neq 0$, donc $x \neq 4$. Ainsi,

$$\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{4\} =]-\infty, 4[\cup]4, +\infty[.$$

Comme c'est un quotient de polynômes, g est continue sur chacun de ces deux intervalles :

$$\boxed{g \text{ est continue sur }]-\infty, 4[\text{ et }]4, +\infty[.}$$

c) La racine impose

$$3x - 6 \geq 0 \iff x \geq 2.$$

Donc $\mathcal{D}_h = [2, +\infty[$. La fonction $x \mapsto 3x - 6$ est un polynôme continu et la racine carrée est continue sur $[0, +\infty[$. Par composition,

$$\boxed{h \text{ est continue sur } [2, +\infty[.}$$

Correction 3 – Raccorder deux morceaux

a) Comme $1 \leq 1$, on utilise la première formule :

$$f_a(1) = 2 \times 1 + 1 = 3.$$

La limite à gauche utilise aussi cette formule :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 1) = 3.$$

À droite, on utilise $x^2 + a$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f_a(x) = 1^2 + a = 1 + a.$$

b) La continuité en 1 exige l'égalité des trois nombres. Il faut donc

$$1 + a = 3 \iff \boxed{a = 2}.$$

c) Pour $a = 2$, chaque morceau est un polynôme, donc est continu sur son intervalle. Le seul point de raccord est 1, et les deux limites ainsi que la valeur y valent 3. La fonction est donc continue sur $\mathbb{R}$.

3 Corrections des exercices 4 et 5 : valeurs intermédiaires

Correction 4 – Existence d'une solution

a) $f(x) = x^3 - 2x - 1$ est un polynôme. Il est donc continu sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[1; 2]$.

b)

$$f(1) = 1 - 2 - 1 = -2, \quad f(2) = 8 - 4 - 1 = 3.$$

c) La fonction est continue sur $[1; 2]$, et

$$f(1) = -2 < 0 < 3 = f(2).$$

Le nombre 0 est donc compris entre $f(1)$ et $f(2)$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'un réel $c \in]1; 2[$ tel que

$$f(c) = 0.$$

d) Non. Le théorème garantit au moins une solution, mais il ne dit pas qu'il n'y en a qu'une. Il faut étudier les variations ou disposer d'une autre information sur f .

Correction 5 – Existence et unicité

a)

$$f'(x) = 3x^2 - 2.$$

Sur $[1; 2]$, on a $x \geq 1$, donc $x^2 \geq 1$. Par conséquent,

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \geq 3 - 2 = 1 > 0.$$

b) Comme $f'(x) > 0$ sur $[1; 2]$, la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle.

c) Une fonction strictement croissante prend une valeur donnée au plus une fois. L'exercice 4 a déjà établi l'existence d'une solution ; il y a donc exactement une solution dans $[1; 2]$:

$$\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ possède une unique solution dans } [1; 2].$$

d) On calcule

$$\begin{aligned} f(1,6) &= 1,6^3 - 2 \times 1,6 - 1 \\ &= 4,096 - 3,2 - 1 \\ &= -0,104 < 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(1,7) &= 1,7^3 - 2 \times 1,7 - 1 \\ &= 4,913 - 3,4 - 1 \\ &= 0,513 > 0. \end{aligned}$$

Comme f est croissante et s'annule en c ,

$$1,6 < c < 1,7.$$

4 Corrections des exercices 6 à 8 : dichotomie et suites

Correction 6 – Premières étapes d'une dichotomie

a)

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(1) = 1 > 0.$$

La fonction f est un polynôme, donc continue sur $[0; 1]$. Le théorème des valeurs intermédiaires garantit une solution dans $]0; 1[$.

b) Le milieu de $[0; 1]$ est

$$m = \frac{0+1}{2} = 0,5.$$

On calcule

$$f(0,5) = 0,5^3 + 0,5 - 1 = 0,125 + 0,5 - 1 = -0,375 < 0.$$

Le changement de signe est donc entre 0,5 et 1. Le nouvel intervalle est $[0,5; 1]$.

c) Les étapes suivantes sont :

Étape	Intervalle de départ	Milieu	Intervalle conservé
1	$[0,5; 1]$	0,75, image positive	$[0,5; 0,75]$
2	$[0,5; 0,75]$	0,625, image négative	$[0,625; 0,75]$
3	$[0,625; 0,75]$	0,6875, image positive	$[0,625; 0,6875]$

Il reste bien un changement de signe aux extrémités de chaque intervalle.

d) L'intervalle initial a pour longueur 1. Après quatre étapes, sa longueur vaut

$$\frac{1}{2^4} = \boxed{0,0625}.$$

Dans le tableau, après quatre milieux testés, l'intervalle est par exemple $[0,625; 0,6875]$, dont la longueur est 0,0625.

Correction 7 – Image d'une suite convergente

a) Comme $1/n \rightarrow 0$,

$$u_n = 3 - \frac{1}{n} \rightarrow 3.$$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 5$ est un polynôme. Il est donc continu sur $\mathbb{R}$, en particulier en 3.

c) **Première méthode.** Par le théorème sur l'image d'une suite convergente,

$$f(u_n) \rightarrow f(3) = 3^2 - 2 \times 3 + 5 = 9 - 6 + 5 = \boxed{8}.$$

Deuxième méthode. On développe directement :

$$\begin{aligned} f(u_n) &= \left(3 - \frac{1}{n}\right)^2 - 2\left(3 - \frac{1}{n}\right) + 5 \\ &= 9 - \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2} - 6 + \frac{2}{n} + 5 \\ &= 8 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Comme $1/n \rightarrow 0$ et $1/n^2 \rightarrow 0$, cette expression tend vers 8, ce qui confirme le premier résultat.

Correction 8 – Suite définie par récurrence

On pose $f(x) = \frac{x+4}{3}$.

a) Stabilité de l'intervalle. Si $x \in [0; 2]$, alors

$$4 \leq x + 4 \leq 6.$$

En divisant par $3 > 0$,

$$\frac{4}{3} \leq f(x) \leq 2.$$

Donc $f(x) \in [0; 2]$. L'intervalle $[0; 2]$ est stable et, comme $u_0 = 0 \in [0; 2]$, on a $u_n \in [0; 2]$ pour tout n .

b) Variation. Pour $x \in [0; 2]$,

$$f(x) - x = \frac{x+4}{3} - x = \frac{4-2x}{3} \geq 0.$$

Ainsi $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geq 0$. La suite est croissante. Comme $u_n \in [0; 2]$, elle est majorée par 2.

c) Limite. Une suite croissante et majorée converge ; notons sa limite ℓ . La fonction f est affine, donc continue sur $\mathbb{R}$. On peut passer à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$:

$$\ell = \frac{\ell+4}{3}.$$

Donc

$$3\ell = \ell + 4 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\ell = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\ell = 2}.$$

5 Correction de l'exercice 9 : problème de température

Correction 9 – Problème : une température

a) $T(t) = 18 + 4t - 0,2t^2$ est un polynôme en t . Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur $[0; 10]$.

b)

$$T(0) = 18, \quad T(10) = 18 + 4 \times 10 - 0,2 \times 10^2 = 18 + 40 - 20 = 38.$$

Le nombre 30 est compris entre 18 et 38. Par continuité et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un instant $t \in]0; 10[$ tel que $T(t) = 30$.

c) La dérivée est

$$T'(t) = 4 - 0,4t.$$

Pour $0 \leq t \leq 10$, on a $0 \leq 0,4t \leq 4$, donc $T'(t) \geq 0$. Elle est même strictement positive pour $0 \leq t < 10$. La fonction T est donc strictement croissante sur $[0; 10]$. Elle prend la valeur 30 au plus une fois. Avec l'existence obtenue en b), il y a exactement un tel instant.

d)

$$T(3) = 18 + 12 - 0,2 \times 9 = 30 - 1,8 = 28,2 < 30,$$

$$T(4) = 18 + 16 - 0,2 \times 16 = 34 - 3,2 = 30,8 > 30.$$

Comme T est croissante, l'instant t_0 recherché vérifie

$$\boxed{3 < t_0 < 4.}$$

La température atteint donc 30°C entre la troisième et la quatrième heure de l'expérience.

6 Correction de l'exercice 10 : synthèse

Correction 10 – Synthèse : discuter une équation

On pose

$$F(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}, \quad I = [0; 2].$$

a) Sur I , $x \geq 0$, donc $x + 1 \geq 1 > 0$. Le dénominateur ne s'annule pas. Comme F est un quotient de polynômes, elle est continue sur I .

b)

$$F(0) = \frac{0^2 + 1}{0 + 1} = 1, \quad F(2) = \frac{2^2 + 1}{2 + 1} = \frac{5}{3}.$$

Pour tout $m \in [1; 5/3]$, le nombre m est compris entre $F(0)$ et $F(2)$. Le théorème des valeurs intermédiaires garantit donc au moins une solution de $F(x) = m$ dans $[0; 2]$:

$$\boxed{1 \leq m \leq \frac{5}{3}}.$$

Pour $m = 1$ ou $m = 5/3$, la solution est déjà une extrémité possible ; pour une valeur strictement comprise, le théorème donne une solution dans $]0; 2[$.

c) Avec la règle du quotient,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{2x(x+1) - (x^2+1) \times 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Le dénominateur est strictement positif sur I . Le numérateur $x^2 + 2x - 1$ s'annule en

$$x = -1 \pm \sqrt{2}.$$

La seule racine située dans $[0; 2]$ est $r = -1 + \sqrt{2}$. Ainsi, F' est négative sur $[0; r[$, nulle en r , puis positive sur $]r; 2]$. La fonction F décroît puis croît ; elle atteint donc un minimum en r et n'est pas strictement monotone sur tout I .

Si $m \in]1; 5/3[$, alors $m > F(0) = 1$. Sur la partie $[0; r]$, on a $F(x) \leq F(0) = 1$, donc il n'y a aucune solution. Sur $]r; 2]$, la fonction est strictement croissante et m est compris entre $F(r)$ et $F(2) = 5/3$; il y a donc exactement une solution. Ainsi, pour les valeurs strictement comprises entre $F(0)$ et $F(2)$, la solution est unique.

Il faut néanmoins éviter de conclure à l'unicité pour toutes les valeurs de m comprises entre le minimum et $F(2)$: certaines valeurs, comme $m = 1$, peuvent avoir deux antécédents.

d) Pour $m = 1$, le dénominateur $x + 1$ est non nul sur I . On peut multiplier l'équation par $x + 1$:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = 1 &\iff x^2 + 1 = x + 1 \\ &\iff x^2 - x = 0 \\ &\iff x(x - 1) = 0. \end{aligned}$$

Les solutions sont $x = 0$ et $x = 1$, toutes deux dans $[0; 2]$. Il y a donc bien deux solutions, ce qui confirme qu'une fonction continue n'est pas forcément injective :

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0;2]} = \{0; 1\}}.$$

7 Corrections du rappel différé

Correction R1

La fonction n'est pas définie en 1, car le dénominateur s'annule. Pour $x \neq 1$,

$$g(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2.$$

Mais $g(1)$ n'existe pas. La condition « fonction définie au point » n'est pas satisfaite :

$$\boxed{g \text{ n'est pas continue en } 1.}$$

Correction R2

On a

$$f(0) = 0 + 1 = 1.$$

À gauche,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1.$$

À droite,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \times 0 + a = a.$$

La continuité en 0 impose $a = 1$. Donc

$$\boxed{a = 1.}$$

Pour cette valeur, les deux morceaux sont des polynômes et se raccordent continûment en 0, donc la fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

Correction R3

Avant d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $f(x) = k$, il faut identifier l'intervalle fermé $[a; b]$, vérifier que f est continue sur cet intervalle et vérifier que k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$. On peut alors conclure qu'il existe un $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$. Pour l'unicité, il faut ensuite une information supplémentaire, par exemple la stricte monotonie.

Correction R4

Si $u_n \rightarrow \ell$ et si f est continue en ℓ , alors

$$f(u_n) \rightarrow f(\ell).$$

Or $u_{n+1} = f(u_n)$, et le décalage d'un rang ne change pas la limite d'une suite convergente : $u_{n+1} \rightarrow \ell$. On obtient donc

$$\boxed{\ell = f(\ell).}$$

Cette équation est seulement nécessaire. Une suite peut ne pas converger, ou bien avoir plusieurs comportements possibles selon son premier terme, même si l'équation des points fixes possède des solutions. Il faut d'abord établir la convergence par un encadrement, une monotonie ou un autre argument.

Point de méthode

Une correction complète doit faire apparaître la condition utilisée, le calcul, puis la phrase qui interprète le résultat. Pour une équation, écrire séparément « existence », « unicité » et « encadrement » évite de leur attribuer le même rôle.