

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Continuité des fonctions d'une variable réelle

Comprendre les valeurs qui évoluent sans saut

Un cours progressif avec exemples, exercices et indices

Objectifs

- Expliquer ce que signifie « une fonction est continue » en un point ou sur un intervalle.
- Justifier la continuité d'une fonction construite à partir de fonctions usuelles, et utiliser le lien entre dérivabilité et continuité.
- Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour établir l'existence, l'unicité et un encadrement d'une solution de $f(x) = k$.
- Comprendre la dichotomie et utiliser la continuité pour étudier une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Cadre du chapitre. Ce fascicule est conçu pour une préparation au baccalauréat général avec l'enseignement de spécialité mathématiques. Pour la session 2027, le texte de référence est le programme publié au Bulletin officiel spécial n° 8 du 25 juillet 2019. Il contient la continuité en un point et sur un intervalle, le lien « dérivable donc continue », l'image d'une suite convergente par une fonction continue, le théorème des valeurs intermédiaires et le cas des fonctions continues strictement monotones.

Un nouveau programme a été publié au Bulletin officiel n° 14 du 2 avril 2026. Il entrera en application en classe de terminale à la rentrée 2027–2028 et reprend ces notions, avec notamment la dichotomie et l'étude de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ lorsque f est continue d'un intervalle dans lui-même. Le programme précise que la justification théorique de la continuité sur un intervalle n'est pas un objectif : on s'appuie donc sur les fonctions usuelles et les règles connues, sans développer une théorie plus avancée. Les exercices de ce fascicule sont créés pour l'apprentissage ; ils ne sont pas des sujets officiels.

Les textes institutionnels sont accessibles dans le BO spécial n° 8 de 2019 et le BO n° 14 de 2026.

Organisation conseillée. Prévoir quatre à six séances de 35 à 45 minutes, avec une pause courte :

1. diagnostic, limites et intuition de la continuité ;
2. continuité en un point, sur un intervalle et opérations ;
3. théorème des valeurs intermédiaires, existence et unicité ;
4. encadrement et méthode de dichotomie ;
5. suites définies par récurrence et exercices de synthèse ;
6. rappel différé et reprise des points encore fragiles.

Les exercices sont dans ce fascicule avec leurs indices. Les corrections détaillées sont dans le fascicule

séparé `corrections.pdf`. Cherche d'abord seule, consulte l'indice si nécessaire, puis seulement la correction.

Table des matières

1	Avant de commencer : diagnostic et rappels	4
2	1. Comprendre la continuité en un point	6
3	2. Fonctions continues et opérations	8
4	3. Le théorème des valeurs intermédiaires	10
5	4. Encadrer une solution par dichotomie	12
6	5. Continuité et suites définies par récurrence	13
7	Exercices gradués	15
8	Bilan, erreurs fréquentes et rappel différé	19

1 Avant de commencer : diagnostic et rappels

Durée indicative : 12 à 15 minutes, sans note et sans calculatrice. Ce diagnostic sert à repérer les gestes à reprendre, pas à attribuer une note. Si une question bloque, écrire simplement « à revoir » et continuer. Les réponses sont dans le fascicule séparé des corrections.

D1. Pour $f(x) = x^2 - 3x + 1$, calculer $f(2)$.

D2. Déterminer l'ensemble de définition de $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$.

D3. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} (4x - 3)$.

D4. Pour $h(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, expliquer pourquoi la formule ne permet pas de calculer $h(2)$, puis factoriser le numérateur.

D5. La fonction $p(x) = \frac{1}{x+3}$ est-elle définie en $x = -3$? Sur quels intervalles son expression est-elle régulière?

D6. La suite $u_n = 2 + \frac{1}{n}$, pour $n \geq 1$, converge-t-elle? Si oui, vers quel nombre?

D7. Une fonction continue sur $[0; 1]$ vérifie $q(0) = -2$ et $q(1) = 3$. Que peut-on affirmer à propos de l'équation $q(x) = 0$ sur $[0; 1]$?

D8. Quelle différence y a-t-il entre « il existe une solution » et « il existe une unique solution »?

1.1 Les prérequis indispensables

Ensemble de définition. Une fonction ne peut être utilisée que pour les nombres autorisés par sa formule. Il est interdit de diviser par zéro et le nombre sous une racine carrée doit être positif ou nul. Par exemple, pour

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2},$$

il faut $x+1 \geq 0$ et $x-2 \neq 0$. Ainsi,

$$\mathcal{D}_g = [-1, +\infty[\setminus \{2\}.$$

Limite et valeur. La valeur $f(a)$ concerne le point a . La limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ décrit ce que deviennent les valeurs lorsque x se rapproche de a , sans nécessairement prendre $x = a$. Une limite peut exister même si $f(a)$ n'existe pas.

Calcul littéral. Pour transformer une expression, il faut notamment connaître

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a), \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

On ne simplifie un facteur dans une fraction qu'après avoir signalé la condition qui le rend non nul.

Dérivée et variations. La dérivée $f'(x)$ mesure la variation instantanée. Si $f'(x) > 0$ sur un intervalle, f y est strictement croissante; si $f'(x) < 0$, elle y est strictement décroissante. Cette information servira à établir l'unicité d'une solution.

Suites convergentes. Si u_n se rapproche d'un nombre ℓ , on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$. Par exemple,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2.$$

À retenir

Avant d'étudier la continuité, vérifier le domaine, distinguer la valeur $f(a)$ de la limite en a , et repérer si une dérivée ou une suite intervient.

2 1. Comprendre la continuité en un point

2.1 L'idée essentielle : pas de saut au voisinage du point

Dans la vie courante, une évolution continue se fait sans saut : une aiguille peut se déplacer progressivement d'une position à une autre. Pour une fonction, on utilise cette image avec prudence : lorsque x se rapproche de a , les valeurs $f(x)$ doivent se rapprocher de la valeur $f(a)$.

Prenons $f(x) = 2x + 1$ et $a = 1$. Pour des abscisses proches de 1, on obtient :

x	0,9	0,99	1	1,01	1,1
$f(x)$	2,8	2,98	3	3,02	3,2

Les valeurs se rapprochent de 3, qui est précisément $f(1)$. La courbe ne présente pas de trou ni de saut au point d'abscisse 1.

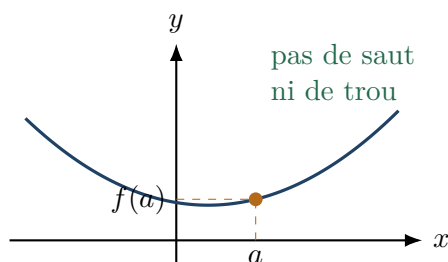


FIGURE 1 – Une courbe continue se rapproche du point de coordonnées $(a; f(a))$ lorsque x se rapproche de a .

2.2 Définition en un point

Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a . On dit que f est **continue en a** lorsque les deux conditions suivantes sont réunies :

1. $f(a)$ existe ;
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

La deuxième condition compare donc deux nombres : la limite, qui décrit le comportement autour de a , et la valeur au point a . La continuité exige qu'ils soient égaux.

Exemple entièrement détaillé

On considère

$$h(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \neq 2, \\ 5 & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Étudions la continuité en 2.

Étape 1 – valeur au point. La deuxième ligne de la définition donne

$$h(2) = 5.$$

Étape 2 – limite autour du point. Lorsque $x \neq 2$, on utilise la première ligne. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4.$$

Étape 3 – comparaison. On obtient $4 \neq 5$. Ainsi,

$$h \text{ n'est pas continue en } 2.$$

La courbe présente un point isolé en hauteur 5, alors que les valeurs voisines se rapprochent de 4.

2.3 Une limite peut exister sans continuité

La fonction

$$r(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

n'est pas définie en 1. Pour $x \neq 1$, on peut factoriser :

$$r(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow 1} r(x) = 2,$$

mais $r(1)$ n'existe pas. La fonction n'est donc pas continue en 1. Il y a un **trou** dans la courbe : connaître la limite ne suffit pas, il faut aussi que la fonction soit définie au point et que sa valeur convienne.

2.4 Continuité sur un intervalle

Une fonction est continue sur un intervalle lorsqu'elle est continue en chaque point de cet intervalle. Pour un intervalle fermé $[a; b]$, on utilise une limite à droite en a et une limite à gauche en b :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

Cette précision est importante pour appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur $[a; b]$.

À retenir

Une fonction est continue en a si elle est définie en a et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Un trou ou un saut suffit à rendre la fonction non continue. Sur un intervalle fermé, les extrémités se lisent du bon côté.

3 2. Fonctions continues et opérations

3.1 Les fonctions usuelles à connaître

On admet les continuités suivantes :

Fonction	Ensemble où elle est continue	Remarque
Polynôme, par exemple $x^2 - 3x + 1$	$\mathbb{R}$	Elle est définie pour tout réel.
Fonction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$	Là où $Q(x) \neq 0$	Le dénominateur ne doit pas s'annuler.
$\sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	Le radicand doit être positif ou nul.
e^x	$\mathbb{R}$	L'exponentielle est définie et continue partout.

Les règles de calcul prolongent cette liste :

- la somme et la différence de fonctions continues sont continues ;
- le produit de fonctions continues est continu ;
- le quotient de fonctions continues est continu là où le dénominateur ne s'annule pas ;
- la composée de fonctions continues est continue sur son domaine.

Enfin, toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle. La réciproque est fausse : une fonction peut être continue sans être dérivable, comme $x \mapsto |x|$ en 0. La continuité concerne l'absence de saut ; la dérivabilité demande en plus une tangente bien définie.

Méthode

Pour justifier qu'une fonction est continue sur un intervalle :

1. déterminer son domaine de définition ;
2. reconnaître les fonctions usuelles utilisées ;
3. appliquer les règles de somme, produit, quotient ou composition ;
4. conclure en nommant l'intervalle exact.

Ne pas écrire seulement « la formule est jolie donc la fonction est continue ». Il faut vérifier les restrictions du domaine, surtout celles d'un quotient ou d'une racine.

Exemple entièrement détaillé

On étudie la continuité de

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}.$$

Étape 1 – domaine. La racine impose $x+1 \geq 0$, donc $x \geq -1$. Le dénominateur impose $x \neq 2$. Ainsi,

$$\mathcal{D}_g = [-1, 2[\cup]2, +\infty[.$$

Étape 2 – fonctions utilisées. La fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est continue sur $[-1, +\infty[$. Le dénominateur $x \mapsto x-2$ est un polynôme, donc il est continu sur $\mathbb{R}$, mais il est nul en 2.

Étape 3 – quotient. Le quotient de ces deux fonctions est continu partout où le dénominateur est non nul. Donc g est continue sur chacun des intervalles

$$\boxed{[-1, 2[\quad \text{et} \quad]2, +\infty[.}$$

On ne dit pas que g est continue en 2, car elle n'y est pas définie.

3.2 Rendre une fonction définie par morceaux continue

Pour une fonction définie par deux formules de part et d'autre de a , le seul point délicat est généralement a . Il faut comparer :

- la limite à gauche ;
- la limite à droite ;
- la valeur $f(a)$.

Les trois doivent être égales.

Exemple entièrement détaillé

Pour un réel k , on définit

$$f_k(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2, \\ kx + 1 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Cherchons la valeur de k qui rend f_k continue en 2.

Étape 1 – valeur en 2. Comme $2 \leq 2$, on utilise la première formule :

$$f_k(2) = 2^2 - 1 = 3.$$

Étape 2 – limite à gauche. La première formule donne

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 1) = 3.$$

Étape 3 – limite à droite. À droite de 2, on utilise la seconde formule :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (kx + 1) = 2k + 1.$$

Étape 4 – condition de continuité. Il faut $2k + 1 = 3$, donc

$$2k = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{k = 1}.$$

Pour cette valeur, les deux morceaux se raccordent au point de coordonnées $(2; 3)$. Pour toute autre valeur de k , il y a un saut en 2.

À retenir

Pour une fonction construite avec des fonctions usuelles, la continuité se justifie sur le domaine où les opérations sont permises. Pour une définition par morceaux, au point de raccord, vérifier limite à gauche, limite à droite et valeur au point.

4 3. Le théorème des valeurs intermédiaires

4.1 L'idée essentielle : une courbe continue ne saute pas par-dessus une valeur

Supposons qu'une courbe continue parte d'une hauteur $f(a)$ et arrive à une hauteur $f(b)$. Si un nombre k se trouve entre ces deux hauteurs, la courbe doit passer par la hauteur k . C'est le rôle du théorème des valeurs intermédiaires.

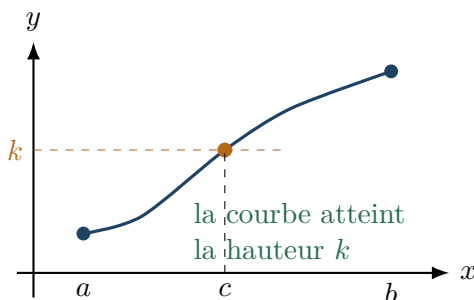


FIGURE 2 – Entre $f(a)$ et $f(b)$, une fonction continue prend toutes les valeurs intermédiaires, notamment $k = f(c)$.

4.2 Énoncé du théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ tel que

$$f(c) = k.$$

Si k est strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$, on peut prendre $c \in]a; b[$.

Ce que le théorème apporte : l'existence d'une solution.

Ce qu'il n'apporte pas seul : la valeur exacte de la solution, son unicité, ni un encadrement précis. Pour l'unicité, on utilise souvent une variation stricte ; pour un encadrement, on teste des valeurs ou on applique la dichotomie.

Exemple entièrement détaillé

On considère

$$f(x) = x^3 + x - 1.$$

Nous allons montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution et en donner un premier encadrement.

Étape 1 – continuité. La fonction f est un polynôme. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0; 1]$.

Étape 2 – changement de signe. On calcule

$$f(0) = 0^3 + 0 - 1 = -1, \quad f(1) = 1^3 + 1 - 1 = 1.$$

Le nombre 0 est compris entre -1 et 1 . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $c \in]0; 1[$ tel que $f(c) = 0$.

Étape 3 – unicité. On dérive :

$$f'(x) = 3x^2 + 1.$$

Pour tout réel x , $3x^2 \geq 0$, donc $f'(x) \geq 1 > 0$. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Une fonction strictement croissante ne peut prendre la valeur 0 en deux abscisses différentes. La solution c est donc unique.

Étape 4 – encadrement. On teste deux valeurs proches :

$$f(0,68) = 0,68^3 + 0,68 - 1 = -0,005568 < 0,$$

$$f(0,69) = 0,69^3 + 0,69 - 1 = 0,018509 > 0.$$

Comme f est croissante et que $f(c) = 0$, on obtient

$$0,68 < c < 0,69.$$

La calculatrice pourra ensuite donner une valeur approchée, mais elle ne remplace pas la justification de l'existence et de l'unicité.

4.3 Deux fonctions peuvent donner plusieurs solutions

La continuité seule ne garantit pas l'unicité. Par exemple, une courbe peut monter, redescendre, puis remonter en traversant plusieurs fois une même hauteur. Pour annoncer « une unique solution », il faut une information supplémentaire, comme « f est strictement monotone sur l'intervalle ».

À retenir

Pour appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, vérifier que l'intervalle étudié est $[a; b]$, que f est continue sur cet intervalle et que k est entre $f(a)$ et $f(b)$. Puis conclure « il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$ ». La continuité donne l'existence, pas automatiquement l'unicité.

5 4. Encadrer une solution par dichotomie

5.1 Le principe

On suppose que f est continue sur $[a; b]$ et que $f(a) - k$ et $f(b) - k$ sont de signes opposés. On cherche une solution de $f(x) = k$.

La **dichotomie** consiste à couper l'intervalle en deux :

1. calculer le milieu $m = \frac{a+b}{2}$;
2. calculer le signe de $f(m) - k$;
3. conserver la moitié dans laquelle les signes aux extrémités sont opposés ;
4. recommencer jusqu'à obtenir la précision voulue.

Si $f(m) = k$, la solution est trouvée exactement et l'algorithme s'arrête.

À chaque étape, la longueur de l'intervalle est divisée par 2. Après n étapes, la longueur vaut

$$\frac{b-a}{2^n}.$$

Cette formule permet de choisir à l'avance un nombre d'itérations.

Exemple entièrement détaillé

Reprenons $f(x) = x^3 + x - 1$ et cherchons sa solution sur $[0; 1]$. On prend $k = 0$. Les signes de $f(0)$ et $f(1)$ sont respectivement négatif et positif.

Les premières étapes sont :

Étape	Intervalle conservé	Milieu testé	Signe de $f(m)$
0	$[0; 1]$	$m = 0,5$	$f(0,5) = -0,375 < 0$
1	$[0,5; 1]$	$m = 0,75$	$f(0,75) = 0,171875 > 0$
2	$[0,5; 0,75]$	$m = 0,625$	$f(0,625) = -0,130859375 < 0$
3	$[0,625; 0,75]$	$m = 0,6875$	$f(0,6875) > 0$
4	$[0,625; 0,6875]$	$m = 0,65625$	$f(0,65625) < 0$

Après ces étapes, la solution unique est encadrée par

$$0,65625 < c < 0,6875.$$

La longueur de cet intervalle est bien $0,6875 - 0,65625 = 0,03125 = 1/2^5$. On continue de la même manière pour obtenir un encadrement plus fin.

Méthode

Pour rédiger une dichotomie, présenter à chaque ligne l'intervalle, le milieu, la valeur ou le signe testé, puis la nouvelle moitié conservée. Ne pas écrire seulement une suite de nombres sans expliquer pourquoi l'intervalle change. La condition d'arrêt peut être une longueur d'intervalle inférieure à une précision ε , ou un nombre fixé d'itérations.

À retenir

La dichotomie conserve toujours un intervalle où le changement de signe est garanti. Chaque étape divise sa longueur par 2. Elle fournit un encadrement contrôlé, mais une valeur approchée doit être accompagnée de sa précision.

6 5. Continuité et suites définies par récurrence

6.1 Image d'une suite convergente

Si u_n tend vers ℓ et si f est continue en ℓ , alors les images $f(u_n)$ tendent vers $f(\ell)$:

$$u_n \longrightarrow \ell \quad \text{et} \quad f \text{ continue en } \ell \quad \implies \quad f(u_n) \longrightarrow f(\ell).$$

Cette propriété permet de passer à la limite dans une relation de récurrence. Si $u_{n+1} = f(u_n)$, alors, lorsque la suite converge vers ℓ , on a également $u_{n+1} \rightarrow \ell$. La continuité donne donc

$$\ell = f(\ell).$$

Cette équation est une **condition nécessaire** pour la limite. Elle ne prouve pas à elle seule que la suite converge.

Exemple entièrement détaillé

On définit $u_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

Montrons que u_n converge et déterminons sa limite.

Étape 1 – choisir un intervalle stable. Posons $I = [1; 2]$. Si $x \in I$, alors

$$3 \leq x + 2 \leq 4,$$

donc

$$\sqrt{3} \leq \sqrt{x + 2} \leq 2.$$

En particulier, $\sqrt{x + 2} \in [1; 2]$. La fonction $f(x) = \sqrt{x + 2}$ envoie donc I dans I . Comme $u_0 = 1 \in I$, une récurrence permet d'obtenir $u_n \in I$ pour tout n . La suite est ainsi bornée par 1 et 2.

Étape 2 – étudier le sens de variation. Pour $x \in [1; 2]$, les deux membres de l'inégalité sont positifs. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \sqrt{x + 2} \geq x &\iff x + 2 \geq x^2 \\ &\iff (2 - x)(x + 1) \geq 0. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vraie sur $[1; 2]$. Ainsi,

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \geq u_n.$$

La suite est croissante et majorée par 2. Elle converge donc vers un réel $\ell \in [1; 2]$.

Étape 3 – utiliser la continuité. La fonction $f(x) = \sqrt{x + 2}$ est continue sur $[1; 2]$. En passant à la limite dans la relation de récurrence :

$$\ell = \sqrt{2 + \ell}.$$

Les deux membres sont positifs ; on peut élever au carré :

$$\begin{aligned} \ell^2 &= 2 + \ell, \\ \ell^2 - \ell - 2 &= 0, \\ (\ell - 2)(\ell + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Les solutions possibles sont 2 et -1 . Comme $\ell \in [1; 2]$, la seule possibilité est

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.}$$

La continuité est le pont qui autorise le passage de $f(u_n)$ à $f(\ell)$.

Méthode

Pour une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, chercher dans cet ordre :

1. un intervalle I contenant u_0 et stable par f ;
2. la continuité de f sur I ;
3. une majoration ou une minoration ;
4. le sens de variation, souvent grâce au signe de $f(x) - x$;
5. l'équation $\ell = f(\ell)$ après avoir justifié la convergence.

À retenir

Pour passer à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, il faut que f soit continue et que la convergence de la suite ait déjà été établie. Résoudre $\ell = f(\ell)$ seul ne suffit pas à démontrer la convergence.

7 Exercices gradués

Les exercices vont de l'identification de la continuité à l'étude d'une suite. Les corrections détaillées sont dans le fascicule séparé **corrections.pdf**. Pour chaque exercice, essaie d'abord de rédiger les étapes ; l'indice est là pour débloquer la méthode, pas pour remplacer la recherche.

Exercice 1 – Valeur, limite et continuité

On définit

$$h(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \neq 2, \\ 4 & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

- a) Calculer $h(2)$.
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$.
- c) La fonction est-elle continue en 2 ? Justifier avec la définition.

Indice.

La valeur au point vient de la deuxième ligne. Pour la limite, on utilise la formule valable lorsque $x \neq 2$. Compare ensuite les deux résultats.

Exercice 2 – Domaine et fonctions usuelles

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition et indiquer les intervalles sur lesquels elle est continue :

$$f(x) = x^3 - 2x + 1, \quad g(x) = \frac{x+1}{x-4}, \quad h(x) = \sqrt{3x-6}.$$

La réponse doit mentionner la règle utilisée.

Indice.

Un polynôme est continu sur $\mathbb{R}$. Pour un quotient, exclure le zéro du dénominateur. Pour une racine, commencer par imposer $3x - 6 \geq 0$.

Exercice 3 – Raccorder deux morceaux

Pour un réel a , on définit

$$f_a(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq 1, \\ x^2 + a & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

- a) Calculer $f_a(1)$ et les limites à gauche et à droite en 1.
- b) Déterminer a pour que f_a soit continue en 1.
- c) Pour cette valeur de a , expliquer pourquoi la fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

Indice.

Le seul point qui n'est pas immédiatement couvert par une formule polynomiale est le point de raccord 1. Les trois nombres à comparer sont 3, 3 et $1 + a$.

Exercice 4 – Existence d'une solution

On considère $f(x) = x^3 - 2x - 1$ sur $[1; 2]$.

- a) Justifier que f est continue sur $[1; 2]$.

- b) Calculer $f(1)$ et $f(2)$.
- c) Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution dans $]1; 2[$.
- d) Peut-on conclure à ce stade que la solution est unique ? Expliquer.

Indice.

Compare 0 à $f(1)$ et $f(2)$. Pour l'unicité, il faudrait une information de monotonie, qui n'est pas fournie par le théorème seul.

Exercice 5 – Existence et unicité

On reprend $f(x) = x^3 - 2x - 1$ sur $[1; 2]$.

- a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[1; 2]$.
- b) En déduire que f est strictement croissante sur cet intervalle.
- c) Compléter la conclusion de l'exercice 4 : combien l'équation $f(x) = 0$ possède-t-elle de solutions dans $[1; 2]$?
- d) Vérifier que $f(1,6) < 0$ et $f(1,7) > 0$, puis donner un encadrement de la solution.

Indice.

Une dérivée strictement positive donne une fonction strictement croissante. Une fonction strictement croissante prend une valeur donnée au plus une fois.

Exercice 6 – Premières étapes d'une dichotomie

On cherche la solution de $x^3 + x - 1 = 0$ dans $[0; 1]$. On note $f(x) = x^3 + x - 1$.

- a) Calculer $f(0)$ et $f(1)$, puis justifier qu'une solution existe.
- b) Calculer le milieu de $[0; 1]$ et le signe de l'image de ce milieu. En déduire le nouvel intervalle.
- c) Faire encore trois étapes de dichotomie en présentant un tableau avec l'intervalle, le milieu et le signe testé.
- d) Quelle est la longueur de l'intervalle obtenu après quatre étapes ?

Indice.

À chaque étape, conserver la moitié dont les deux extrémités donnent des images de signes opposés. La longueur initiale vaut 1.

Exercice 7 – Image d'une suite convergente

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = 3 - \frac{1}{n}$ et $f(x) = x^2 - 2x + 5$.

- a) Déterminer la limite de u_n .
- b) Justifier que f est continue au nombre obtenu.
- c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)$ de deux manières : d'abord en utilisant le théorème sur l'image d'une suite convergente, puis en développant $f(u_n)$.

Indice.

La fonction f est un polynôme. Dans la deuxième méthode, remplacer u_n par $3 - 1/n$, développer, puis utiliser $1/n \rightarrow 0$.

Exercice 8 – Suite définie par récurrence

On définit $u_0 = 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 4}{3}.$$

- Montrer que l'intervalle $I = [0; 2]$ est stable par la fonction $f(x) = \frac{x + 4}{3}$.
- Montrer que la suite est croissante et majorée par 2.
- En déduire qu'elle converge vers une limite ℓ , puis utiliser la continuité de f pour déterminer ℓ .

Indice.

Pour $x \in [0; 2]$, encadrer $(x + 4)/3$. Pour la variation, étudier le signe de $f(x) - x = (4 - 2x)/3$. La limite vérifie $\ell = (\ell + 4)/3$.

Exercice 9 – Problème : une température

Pendant les dix premières heures d'une expérience, la température, en degrés Celsius, est modélisée par

$$T(t) = 18 + 4t - 0,2t^2, \quad 0 \leq t \leq 10,$$

où t est exprimé en heures.

- Justifier que T est continue sur $[0; 10]$.
- Calculer $T(0)$ et $T(10)$. Montrer qu'il existe un instant où la température vaut 30°C .
- Étudier les variations de T sur $[0; 10]$ et en déduire l'unicité de cet instant.
- Vérifier que $T(3) < 30 < T(4)$. Donner un encadrement de l'instant à une heure près et rédiger une phrase-réponse avec l'unité.

Indice.

La dérivée est $T'(t) = 4 - 0,4t$. Pour la question b), le nombre 30 doit être comparé aux deux températures extrêmes obtenues aux bornes.

Exercice 10 – Synthèse : discuter une équation

On considère, selon le paramètre réel m , l'équation

$$\frac{x^2 + 1}{x + 1} = m.$$

On se place sur l'intervalle $I = [0; 2]$.

- Justifier que la fonction $F(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ est continue sur I .
- Calculer $F(0)$ et $F(2)$. Pour quelles valeurs de m le théorème des valeurs intermédiaires garantit-il au moins une solution dans I ?
- Calculer $F'(x)$, étudier son signe sur I , puis préciser si la solution est unique lorsque m est strictement entre $F(0)$ et $F(2)$.
- Pour $m = 1$, résoudre l'équation exactement et vérifier la cohérence avec l'étude précédente.

Indice.

Sur I , $x + 1$ est strictement positif. Pour la dérivée du quotient, utiliser $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$. Pour $m = 1$, commencer par multiplier par $x + 1$, qui est non nul sur I .

8 Bilan, erreurs fréquentes et rappel différé

8.1 Bilan à relire avant un exercice

1. f est continue en a si $f(a)$ existe et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
2. Les polynômes sont continus sur $\mathbb{R}$, les quotients là où leur dénominateur ne s'annule, et les fonctions usuelles se combinent par somme, produit, quotient ou composition.
3. Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle. L'inverse n'est pas toujours vrai.
4. Si f est continue sur $[a; b]$ et si k est entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = k$ possède au moins une solution.
5. Une stricte monotonie apporte l'unicité ; elle ne remplace pas la preuve d'existence.
6. La dichotomie divise par deux la longueur d'un intervalle où le changement de signe est conservé.
7. Si $u_n \rightarrow \ell$ et si f est continue en ℓ , alors $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$. Dans une récurrence convergente, $\ell = f(\ell)$.

8.2 Erreurs fréquentes à analyser

- Confondre $f(a)$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$: la continuité demande de comparer les deux.
- Oublier qu'une fonction non définie en a ne peut pas être continue en a , même si sa limite existe.
- Dire qu'une fonction est continue sur tout son domaine sans séparer les intervalles lorsqu'un dénominateur s'annule.
- Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sans vérifier la continuité sur tout l'intervalle fermé.
- Conclure à l'unicité à partir de l'existence seule.
- Donner un nombre approché sans fournir l'intervalle ou la précision qui justifie cette approximation.
- Résoudre $\ell = f(\ell)$ pour une suite sans avoir démontré que la suite converge.
- Dans une dichotomie, garder une moitié sans vérifier le changement de signe aux nouvelles extrémités.

8.3 Auto-évaluation

Compétence	Je débute	Je m'entraîne	Je sais expliquer
Distinguer une valeur, une limite et la continuité			
Justifier la continuité sur un intervalle			
Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires			
Séparer existence, unicité et encadrement			
Effectuer une dichotomie lisible			
Étudier une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec la continuité			

8.4 Rappel différé

À refaire quelques jours plus tard, sans relire le cours auparavant :

- R1.** La fonction $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ est-elle continue en 1 ? Distinguer la limite et la valeur au point.
- R2.** Déterminer le réel a pour lequel $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 0, \\ 2x + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est continue en 0.
- R3.** Énoncer les trois vérifications nécessaires avant d'utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour $f(x) = k$.
- R4.** Une suite convergente vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est continue. Quelle équation doit vérifier sa limite ? Pourquoi cette équation ne suffit-elle pas à prouver la convergence ?

À retenir

En cas de blocage, revenir à la question précise : cherche-t-on une égalité limite-valeur, une continuité sur un intervalle, une existence, une unicité, un encadrement ou une limite de suite ? Ces mots indiquent la méthode à choisir.