

Fiche d'histoire mathématique

Les fonctions sans saut

De l'intuition géométrique au théorème des valeurs intermédiaires

Idée directrice. Dire qu'une fonction est continue exprime une idée simple : une petite variation de l'entrée ne provoque pas de saut de la sortie. La difficulté historique a été de transformer cette intuition en une définition assez précise pour démontrer l'existence de solutions.

Table des matières

1	La continuité avant sa définition	1
2	Bolzano et le passage par toutes les valeurs	1
3	Cauchy, Weierstrass et la rigueur	1
4	Dichotomie et calcul numérique	1
5	Suites et systèmes dynamiques	2
6	À retenir	2
7	Pour aller plus loin	2

1 La continuité avant sa définition

Les géomètres étudient depuis longtemps des courbes qui peuvent être tracées « sans lever le crayon ». Cette image est utile, mais elle ne suffit pas : une courbe peut être continue et avoir un angle, ou être difficile à tracer malgré une définition parfaitement régulière.

Au XVIII^e siècle, Euler emploie le mot *fonction* pour désigner une expression qui associe une valeur à une variable. Les fonctions servent à décrire des mouvements, des courbes et des lois physiques. Il devient alors nécessaire de préciser ce que signifie le fait qu'une expression varie sans rupture.

2 Bolzano et le passage par toutes les valeurs

Le théorème des valeurs intermédiaires formalise une expérience familière : si une température passe continûment de 10 à 20 degrés, elle prend toutes les valeurs comprises entre les deux.

Bernard Bolzano donne en 1817 une démonstration rigoureuse d'un résultat de ce type. Si une fonction continue prend des signes opposés aux extrémités d'un intervalle, elle s'annule entre les deux. Le théorème ne fournit pas forcément la valeur exacte de la solution, mais il garantit son existence.

3 Cauchy, Weierstrass et la rigueur

Au XIX^e siècle, Cauchy définit la continuité à l'aide des limites. Weierstrass précise encore le langage des ε et des voisinages. Une fonction est continue en a lorsque les valeurs $f(x)$ restent aussi proches que l'on veut de $f(a)$ dès que x est assez proche de a .

Cette définition permet de distinguer trois idées souvent confondues : une fonction peut avoir une limite en un point sans être définie en ce point ; elle peut être définie mais avoir un saut ; elle peut enfin être continue, ce qui relie la limite à la valeur.

4 Dichotomie et calcul numérique

Le théorème des valeurs intermédiaires est théorique, mais il inspire une méthode pratique : la dichotomie. On part d'un intervalle où les signes sont opposés, on coupe l'intervalle en deux, puis on conserve la moitié qui garde le changement de signe. Après n étapes, la largeur est divisée par 2^n .

Cette méthode très ancienne dans son idée devient un algorithme précis lorsque les fonctions sont calculées par une machine. Elle illustre le rôle de la continuité : elle justifie que la recherche ne perd pas la solution.

5 Suites et systèmes dynamiques

Une fonction continue permet aussi d'étudier une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Si la suite converge vers ℓ et si f est continue, alors $\ell = f(\ell)$. Cette idée relie l'analyse à l'étude des itérations, des modèles de population et des systèmes dynamiques.

Repère	Apport
XVII ^e –XVIII ^e siècles	Courbes et fonctions décrivent mouvements et phénomènes.
1748	Euler donne une place centrale au langage des fonctions.
1817	Bolzano démontre un théorème de valeurs intermédiaires.
XIX ^e siècle à aujourd'hui	Cauchy, Weierstrass et les algorithmes rendent la continuité contrôlable.

6 À retenir

La continuité est le pont entre une information locale et une conclusion globale : existence d'une solution, encadrement par dichotomie ou passage à la limite dans une suite. L'intuition du « sans saut » reste utile, mais les preuves reposent sur les limites et les hypothèses exactes.

7 Pour aller plus loin

- MacTutor, histoire générale de l'analyse : panorama historique.
- MacTutor, histoire des limites et du calcul : notations du calcul.
- Pour les racines et la dichotomie, voir aussi la fiche d'histoire de l'algorithmique du même dossier.