

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Corrections expliquées

Fonction exponentielle

À consulter après une première recherche personnelle

Utilisation. Cherche d’abord dans le fascicule du cours. Lis son indice si tu es bloquée, puis compare ta démarche avec la correction complète. Une rédaction différente peut être correcte si elle respecte les conditions et si elle est justifiée. Les exercices sont des créations pédagogiques ; ils ne sont pas présentés comme des sujets officiels du baccalauréat.

Rappel de méthode. Pour une expression exponentielle, commencer par repérer l’exposant et les opérations qui l’entourent. Pour une dérivée, identifier une composée ou un produit. Pour une étude de signe, utiliser que $e^u > 0$. Pour un modèle, vérifier l’unité du temps et interpréter le signe du coefficient dans l’exposant.

Table des matières

1	Diagnostic : réponses et rappels ciblés	3
2	Corrections des exercices 1 à 3 : valeurs et propriétés	5
3	Corrections des exercices 4 et 5 : dérivée et inégalité	7
4	Corrections des exercices 6 et 7 : limites et équations	8
5	Corrections des exercices 8 à 10 : études et modèles	9
6	Corrections du rappel différé	11

1 Diagnostic : réponses et rappels ciblés

Correction D1 – Puissances et signes

On respecte les parenthèses et la priorité de la puissance :

$$2^3 = 8, \quad 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \quad (-2)^2 = 4, \quad -2^2 = -(2^2) = -4.$$

La différence entre $(-2)^2$ et -2^2 vient des parenthèses.

Correction D2 – Taux d'évolution

Une hausse de 5 % correspond au coefficient

$$1 + \frac{5}{100} = 1,05.$$

Le nouveau prix est donc

$$80 \times 1,05 = \boxed{84 \text{ euros}}.$$

Une baisse de 12 % correspond au coefficient

$$1 - \frac{12}{100} = \boxed{0,88}.$$

Correction D3 – Équation et inéquation

Pour l'équation :

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= 7, \\ 2x &= 10, \\ x &= \boxed{5}. \end{aligned}$$

Pour l'inéquation :

$$\begin{aligned} -4x + 1 &\geq 9, \\ -4x &\geq 8, \\ x &\leq -2. \end{aligned}$$

À la dernière étape, on divise par -4 , donc le sens de l'inégalité est inversé. L'ensemble des solutions est $\boxed{]-\infty, -2]}$.

Correction D4 – Dérivée et signe

On remplace x par 2 :

$$p(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 4 - 6 + 1 = \boxed{-1}.$$

La dérivée se calcule terme à terme :

$$\boxed{p'(x) = 2x - 3}.$$

Comme le coefficient de x est positif,

$$2x - 3 < 0 \text{ si } x < \frac{3}{2}, \quad 2x - 3 = 0 \text{ si } x = \frac{3}{2}, \quad 2x - 3 > 0 \text{ si } x > \frac{3}{2}.$$

Correction D5 – Suite géométrique

Une hausse de 10 % correspond au coefficient multiplicateur 1,10. Ainsi,

$$u_1 = 200 \times 1,10 = \boxed{220}, \quad u_2 = 220 \times 1,10 = \boxed{242}.$$

Le coefficient d'une année à la suivante est donc $\boxed{1,10}$.

Correction D6 – Lire le sens de variation

Si $f'(x) > 0$ sur un intervalle, alors f est strictement croissante sur cet intervalle. En langage courant, lorsque x augmente, la valeur de $f(x)$ augmente aussi.

Correction D7 – Comprendre une limite

La notation $x \rightarrow -\infty$ signifie que x prend des valeurs négatives dont la valeur absolue devient de plus en plus grande, par exemple -100 , -1000 , puis -10000 .

La notation $x \rightarrow 0^+$ signifie que x se rapproche de zéro en restant strictement positif, par exemple $0,1$, $0,01$, puis $0,001$. Elle n'autorise donc pas la valeur $x = 0$.

Correction D8 – Lire une formule

$$q(0) = 300 \times 1,04^0 = \boxed{300}.$$

Le nombre 300 est la valeur initiale du modèle. Comme $1,04 > 1$, le modèle décrit une augmentation. Enfin,

$$\begin{aligned} q(t+1) &= 300 \times 1,04^{t+1} \\ &= 300 \times 1,04^t \times 1,04 \\ &= \boxed{1,04q(t)}. \end{aligned}$$

Point de méthode

Le diagnostic vérifie les gestes qui seront réutilisés : puissances, taux d'évolution, signe d'une inégalité, dérivée, suite géométrique et lecture des limites. Une erreur de calcul n'a pas le même remède qu'une difficulté de méthode : il faut repérer précisément l'étape qui a posé problème.

2 Corrections des exercices 1 à 3 : valeurs et propriétés

Correction 1 – Valeurs, signe et comparaison

a) Les valeurs exactes sont

$$\boxed{e^0 = 1}, \quad \boxed{e^1 = e}, \quad \boxed{e^{-1} = \frac{1}{e}}.$$

b) Comme $-2 < -1$ et que l'exponentielle est strictement croissante,

$$\boxed{e^{-2} < e^{-1}}.$$

De même, $0 < 0,5$, donc

$$\boxed{e^0 < e^{0,5}}.$$

c) Pour tout réel x , $e^x > 0$. L'exponentielle ne peut donc être ni nulle ni négative.

d) À la calculatrice,

$$e^{-2} \approx 0,135335.$$

Au millièmè,

$$\boxed{e^{-2} \approx 0,135}.$$

Correction 2 – Transformer une expression

On utilise la formule du produit puis celle du quotient.

a)

$$\begin{aligned} A &= e^{2x+1} e^{x-4} \\ &= e^{(2x+1)+(x-4)} \\ &= \boxed{e^{3x-3}}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} B &= \frac{e^{5x}}{e^{2x+1}} \\ &= e^{5x-(2x+1)} \\ &= \boxed{e^{3x-1}}. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} C &= \frac{e^{x+2}}{e^x} \\ &= e^{(x+2)-x} \\ &= \boxed{e^2}. \end{aligned}$$

Correction 3 – Suite géométrique et croissance

a)

$$u_0 = 50e^0 = \boxed{50}.$$

Avec $e^{0,08} \approx 1,0833$ et $e^{0,16} \approx 1,1735$,

$$u_1 = 50e^{0,08} \approx 54,2, \quad u_2 = 50e^{0,16} \approx 58,7.$$

b)

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 50e^{0,08(n+1)} \\ &= 50e^{0,08n+0,08} \\ &= 50e^{0,08n}e^{0,08} \\ &= \boxed{e^{0,08}u_n}. \end{aligned}$$

c) La raison est $e^{0,08}$. Comme $0,08 > 0$ et que l'exponentielle est croissante, $e^{0,08} > e^0 = 1$. La suite est donc strictement croissante. Le facteur $e^{0,08}$ est le coefficient multiplicateur d'une période dans ce modèle.

3 Corrections des exercices 4 et 5 : dérivée et inégalité

Correction 4 – Dérivées et variations directes

a) Pour $f(x) = e^{-2x+3}$, l'exposant est $u(x) = -2x + 3$, de dérivée $u'(x) = -2$. Donc

$$\boxed{f'(x) = -2e^{-2x+3}}.$$

L'exponentielle est positive, donc $f'(x) < 0$ pour tout x . La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

b) Pour $g(x) = (x+1)e^x$, on utilise la dérivée d'un produit :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \times e^x + (x+1) \times e^x \\ &= (x+2)e^x. \end{aligned}$$

Comme $e^x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $x+2$. Ainsi, g décroît sur $] -\infty, -2]$, puis croît sur $[-2, +\infty[$. Elle atteint son minimum en -2 , égal à

$$g(-2) = (-1)e^{-2} = \boxed{-e^{-2}}.$$

Correction 5 – Tangente et inégalité

a) Pour $f(x) = e^x$,

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = e^0 = 1.$$

L'équation de la tangente en 0 est donc

$$y = f(0) + f'(0)(x-0) = \boxed{x+1}.$$

b) On pose $h(x) = e^x - x - 1$. Son domaine est $\mathbb{R}$ et

$$h'(x) = e^x - 1.$$

Comme l'exponentielle est strictement croissante et vaut 1 en zéro,

$$h'(x) < 0 \text{ si } x < 0, \quad h'(0) = 0, \quad h'(x) > 0 \text{ si } x > 0.$$

La fonction décroît puis croît ; son minimum est atteint en zéro. Il vaut

$$h(0) = 1 - 0 - 1 = \boxed{0}.$$

c) Dire que le minimum vaut zéro signifie que, pour tout réel x ,

$$h(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{e^x \geq 1+x}.$$

L'égalité a lieu seulement lorsque $x = 0$.

4 Corrections des exercices 6 et 7 : limites et équations

Correction 6 – Limites et croissance comparée

a) Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $3x - 1 \rightarrow +\infty$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3x-1} = +\infty.$$

b) Lorsque $x \rightarrow -\infty$, $2x + 5 \rightarrow -\infty$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x+5} = 0.$$

c) Le numérateur est un polynôme de degré 3, et l'exponentielle domine toute puissance entière positive à $+\infty$. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 7}{e^x} = 0.$$

d) Posons $t = -x$. Alors $t \rightarrow +\infty$ et

$$x^2 e^x = t^2 e^{-t} = \frac{t^2}{e^t}.$$

La croissance comparée donne donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0.$$

Correction 7 – Équations et inéquations

a) L'exponentielle est injective :

$$\begin{aligned} e^{2x-1} = e^5 &\iff 2x - 1 = 5 \\ &\iff 2x = 6 \\ &\iff \boxed{x = 3}. \end{aligned}$$

b) Comme l'exponentielle est croissante,

$$\begin{aligned} e^{-3x+2} \geq e^{-4} &\iff -3x + 2 \geq -4 \\ &\iff -3x \geq -6 \\ &\iff \boxed{x \leq 2}. \end{aligned}$$

La dernière division par -3 inverse le sens.

c) On commence par isoler l'exponentielle :

$$\begin{aligned} 3e^{x+1} = 12 &\iff e^{x+1} = 4 \\ &\iff x + 1 = \ln(4) \\ &\iff \boxed{x = \ln(4) - 1}. \end{aligned}$$

Avec $\ln(4) \approx 1,3863$,

$$\boxed{x \approx 0,386}.$$

L'unicité vient de la stricte croissance de l'exponentielle. Si le logarithme n'a pas encore été étudié, la calculatrice permet d'encadrer cette unique solution, mais ne donne pas la transformation exacte à elle seule.

5 Corrections des exercices 8 à 10 : études et modèles

Correction 8 – Étude de la fonction xe^{-x}

a) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Avec la dérivée d'un produit,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) \\ &= (1 - x)e^{-x}. \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{f'(x) = (1 - x)e^{-x}}$.

b) Comme $e^{-x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$:

$$f'(x) > 0 \text{ si } x < 1, \quad f'(1) = 0, \quad f'(x) < 0 \text{ si } x > 1.$$

La fonction croît sur $] -\infty, 1]$, puis décroît sur $[1, +\infty[$.

c) Lorsque $x \rightarrow -\infty$, posons $t = -x$. Alors

$$xe^{-x} = (-t)e^t \rightarrow -\infty.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$xe^{-x} = \frac{x}{e^x} \rightarrow 0$$

par croissance comparée. Donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}.$$

d) Le maximum est atteint en $x = 1$:

$$f(1) = 1 \times e^{-1} = \boxed{\frac{1}{e}}.$$

Correction 9 – Problème : une population modélisée

a) Au début, $t = 0$:

$$P(0) = 2000e^0 = \boxed{2000 \text{ bactéries}}.$$

Après quatre heures,

$$\begin{aligned} P(4) &= 2000e^{0,06 \times 4} \\ &= 2000e^{0,24} \\ &\approx 2000 \times 1,27125 \\ &\approx \boxed{2542,5 \text{ bactéries}}. \end{aligned}$$

b) On dérive :

$$P'(t) = 0,06 \times 2000e^{0,06t}.$$

Les deux facteurs sont positifs, donc $P'(t) > 0$. La population est strictement croissante.

c)

$$\begin{aligned} P(12) &= 2000e^{0,72} \\ &\approx 2000 \times 2,05443 \\ &\approx \boxed{4109 \text{ bactéries}}. \end{aligned}$$

Selon le nombre de chiffres conservés par la calculatrice, $e^{0,72} \approx 2,0544$, ce qui donne environ 4109.

d) Le dépassement de 3000 correspond à

$$\begin{aligned} 2000e^{0,06t} > 3000 &\iff e^{0,06t} > 1,5 \\ &\iff 0,06t > \ln(1,5) \\ &\iff t > \frac{\ln(1,5)}{0,06}. \end{aligned}$$

Comme $\ln(1,5) \approx 0,4055$,

$$t > \frac{0,4055}{0,06} \approx 6,8.$$

La population dépasse donc 3000 bactéries après environ 6,8 heures.

Correction 10 – Synthèse : décroissance et seuil

a)

$$C(0) = 90e^0 = \boxed{90 \text{ mg/L}}.$$

La dérivée est

$$C'(t) = -0,25 \times 90e^{-0,25t}.$$

Comme $C(t) = 90e^{-0,25t}$, on peut écrire

$$\boxed{C'(t) = -0,25C(t)}.$$

La fonction vérifie donc l'équation différentielle $y' = -0,25y$.

b) Pour tout t , $90e^{-0,25t} > 0$. Le coefficient $-0,25$ est négatif, donc $C'(t) < 0$. La concentration est strictement décroissante.

De plus, lorsque $t \rightarrow +\infty$, $-0,25t \rightarrow -\infty$, donc

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = 0}.$$

c) On cherche

$$\begin{aligned} 90e^{-0,25t} \leq 20 &\iff e^{-0,25t} \leq \frac{2}{9} \\ &\iff -0,25t \leq \ln\left(\frac{2}{9}\right) \\ &\iff t \geq \frac{\ln(2/9)}{-0,25} \\ &\iff t \geq \frac{\ln(9/2)}{0,25}. \end{aligned}$$

La division par $-0,25$ inverse le sens de l'inégalité. Avec $\ln(9/2) \approx 1,5041$,

$$t \geq \frac{1,5041}{0,25} \approx 6,0.$$

L'instant exact est environ 6,016 heures ; au dixième, $t \approx 6,0$ heures.

d) La concentration devient inférieure ou égale à 20 milligrammes par litre à partir d'environ six heures après la prise, et reste ensuite inférieure à ce seuil puisque le modèle est décroissant.

6 Corrections du rappel différé

Correction R1

$$\begin{aligned} e^3 e^{-5} &= e^{3-5} \\ &= \boxed{e^{-2}}. \end{aligned}$$

Une exponentielle est toujours strictement positive : le résultat est positif.

Correction R2

L'exposant est $u(x) = 4x + 1$, donc $u'(x) = 4$. Par la formule de composition,

$$\boxed{f'(x) = 4e^{4x+1}}.$$

Correction R3

Par injectivité de l'exponentielle,

$$\begin{aligned} e^{x-2} = e^3 &\iff x - 2 = 3 \\ &\iff \boxed{x = 5}. \end{aligned}$$

Correction R4

Le numérateur est un polynôme de degré 2, tandis que l'exponentielle domine toute puissance entière positive à $+\infty$. Donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x} = 0}.$$

Correction R5

Dans $M(t) = 40e^{-0,1t}$, le coefficient $-0,1$ est négatif. Lorsque t augmente, l'exposant diminue, donc le modèle décrit une décroissance. La valeur initiale est

$$M(0) = 40e^0 = \boxed{40}.$$

Point de méthode

Pour vérifier une correction, ne compare pas seulement le résultat final : repère la propriété utilisée, le signe des facteurs et l'unité du résultat. Une formule juste, appliquée dans un mauvais contexte, peut conduire à une conclusion incorrecte.