

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Fonction exponentielle

Modéliser une croissance, une décroissance et un changement continu

Un cours progressif avec exemples, exercices et indices

Objectifs

- Comprendre ce que représente la fonction exponentielle et utiliser les égalités fondamentales, notamment $e^{x+y} = e^x e^y$.
- Étudier le signe, les variations, la courbe et la dérivée d'une fonction contenant une exponentielle.
- Résoudre des équations et des inéquations lorsque les deux membres peuvent être écrits avec la même base exponentielle.
- Modéliser une croissance ou une décroissance continue et interpréter correctement les paramètres et les unités.

Cadre du chapitre. La fonction exponentielle est une notion de première générale avec enseignement de spécialité, réinvestie ensuite en terminale pour les limites, les équations différentielles et les problèmes de modélisation. Pour une préparation à la session 2027, le cadre de référence est le programme de première publié au Bulletin officiel spécial n° 1 du 22 janvier 2019 et le programme de terminale publié au Bulletin officiel spécial n° 8 du 25 juillet 2019. Le programme de première définit l'exponentielle comme l'unique fonction dérivable vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$, et attend ses propriétés algébriques, son signe, ses variations et des modèles de croissance ou de décroissance.

Un nouveau programme a été publié au Bulletin officiel n° 14 du 2 avril 2026. Il s'appliquera en terminale à partir de la rentrée 2027–2028. Le présent fascicule conserve donc une base commune et signale les outils de terminale lorsqu'ils sont utiles. Les exercices sont créés pour l'apprentissage ; ils ne sont pas présentés comme des sujets officiels.

Les textes institutionnels sont accessibles dans le programme de première du BO spécial n° 1 de 2019, le programme de terminale du BO spécial n° 8 de 2019 et le nouveau programme de terminale du BO n° 14 de 2026.

Organisation conseillée. Prévoir six séances de 35 à 45 minutes, avec une pause courte. Il est préférable de refaire un exercice simple le lendemain plutôt que de vouloir tout mémoriser en une seule fois :

1. diagnostic, taux d'évolution et idée d'une croissance continue ;
2. définition de l'exponentielle et premières valeurs ;
3. propriétés algébriques et suites géométriques ;
4. dérivée, variations, tangente et inégalité utile ;
5. limites, croissance comparée et équations ;
6. modèles, synthèse et rappel différé.

Les exercices sont dans ce fascicule avec leurs indices. Les corrections détaillées et les réponses au rappel différé sont dans le fascicule séparé **corrections.pdf**. Cherche d'abord seule, consulte l'indice si nécessaire, puis seulement la correction.

Table des matières

1	Avant de commencer : diagnostic et rappels	4
2	1. Pourquoi une fonction exponentielle ?	6
3	2. Les propriétés algébriques	8
4	3. Dérivée, signe, variations et tangente	10
5	4. Limites et croissance comparée	12
6	5. Équations, inéquations et études de fonctions	14
7	6. Modèles de croissance, de décroissance et équation différentielle	16
8	Exercices gradués	18
9	Bilan, erreurs fréquentes et rappel différé	22

1 Avant de commencer : diagnostic et rappels

Durée indicative : 12 à 15 minutes, sans note et sans calculatrice. Ce diagnostic sert à repérer les gestes à reprendre, pas à attribuer une note. Si une question bloque, noter simplement le numéro et continuer.

Exercice D1 – Puissances et signes

Calculer sans calculatrice :

$$2^3, \quad 2^{-2}, \quad (-2)^2, \quad -2^2.$$

Exercice D2 – Taux d'évolution

Un prix de 80 euros augmente de 5 %. Donner le coefficient multiplicateur et le nouveau prix. Que devient le coefficient pour une baisse de 12 % ?

Exercice D3 – Équation et inéquation

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$2x - 3 = 7 \quad \text{et} \quad -4x + 1 \geq 9.$$

Exercice D4 – Dérivée et signe

On considère $p(x) = x^2 - 3x + 1$.

- Calculer $p(2)$ et $p'(x)$.
- Indiquer le signe de $2x - 3$ selon la position de x par rapport à $3/2$.

Exercice D5 – Suite géométrique

Une somme de 200 euros augmente de 10 % chaque année. On note u_n la somme après n années.

- Calculer u_1 et u_2 .
- Quel est le coefficient multiplicateur d'une année à la suivante ?

Exercice D6 – Lire le sens de variation

Une fonction f vérifie $f'(x) > 0$ sur un intervalle I . Que peut-on dire du sens de variation de f sur I ? Traduire la réponse par une phrase en langage courant.

Exercice D7 – Comprendre une limite

Que signifie $x \rightarrow -\infty$? Donner deux exemples de nombres qui deviennent très négatifs. La limite $x \rightarrow 0^+$ autorise-t-elle la valeur $x = 0$?

Exercice D8 – Lire une formule

On donne $q(t) = 300 \times 1,04^t$, où t est un nombre d'années.

- Que représente le nombre 300 ?
- Le modèle décrit-il une augmentation ou une diminution ? Justifier.
- Calculer $q(0)$ et écrire la relation entre $q(t+1)$ et $q(t)$.

1.1 Les prérequis indispensables

Pour commencer sereinement, il faut surtout savoir :

- calculer avec les puissances, y compris une puissance négative ;
- reconnaître un coefficient multiplicateur, par exemple $1 + 5/100 = 1,05$ pour une hausse de 5 % ;
- dériver une fonction simple et utiliser le signe de sa dérivée ;
- lire une formule de fonction et distinguer une valeur exacte d'une valeur approchée ;
- comprendre qu'une limite décrit un comportement lorsque la variable s'approche d'une valeur ou devient très grande en valeur absolue.

Une difficulté dans le diagnostic n'empêche pas d'étudier l'exponentielle. Elle indique simplement le rappel à faire en priorité. Les corrections du diagnostic sont au début du fascicule séparé.

2 1. Pourquoi une fonction exponentielle ?

2.1 L'idée essentielle : un même pourcentage à chaque instant

Une hausse de 5 % signifie que l'on multiplie par $1 + 5/100 = 1,05$. Si une somme initiale de 100 euros subit cette hausse une fois, deux fois, puis trois fois, on obtient :

$$100, \quad 100 \times 1,05, \quad 100 \times 1,05^2, \quad 100 \times 1,05^3.$$

Le nombre de périodes est entier : c'est une évolution discrète, modélisée par une suite géométrique.

Dans de nombreuses situations, le temps est continu : une quantité peut évoluer à chaque instant, pas seulement à la fin de chaque année. La fonction exponentielle prolonge l'idée de la puissance à un exposant réel et décrit une évolution dont le taux de variation relatif reste constant.

Nombre de périodes n	0	1	2	3
Somme en euros	100	105	110,25	115,7625

2.2 Définition de la fonction exponentielle

On admet qu'il existe une unique fonction f , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, qui vérifie simultanément

$$f'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f(0) = 1.$$

Cette fonction s'appelle la **fonction exponentielle**. On la note $\exp$, et l'on écrit aussi

$$\exp(x) = e^x.$$

Le nombre e est la valeur $\exp(1)$. Il vaut environ 2,71828. Le symbole e^x signifie donc « l'exponentielle de x », et non pas e multiplié par x .

Les premières valeurs sont :

$$e^0 = 1, \quad e^1 = e \approx 2,718, \quad e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,368.$$

Exemple entièrement détaillé

Calculons exactement puis approximativement trois valeurs.

Étape 1 – exposant nul. Par la condition initiale,

$$e^0 = 1.$$

Étape 2 – exposant 1. Par définition du nombre e ,

$$e^1 = e \approx 2,718.$$

Étape 3 – exposant négatif. La propriété $e^x e^{-x} = 1$, démontrée dans la section suivante, donne

$$e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,368.$$

Interprétation. Un exposant négatif produit ici un nombre positif plus petit que 1. Il ne rend pas l'exponentielle négative.

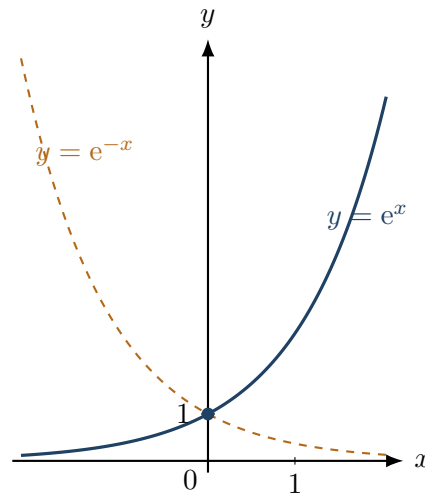


FIGURE 1 – La courbe de e^x est toujours au-dessus de l'axe des abscisses, passe par $(0; 1)$ et monte de gauche à droite.

2.3 Un premier fait important : l'exponentielle est positive

Pour tout réel x ,

$$e^x > 0.$$

Elle ne vaut donc jamais zéro et ne prend jamais de valeur négative. Cette propriété sera utilisée pour étudier le signe d'un produit ou pour comparer des expressions.

À retenir

La fonction exponentielle est définie sur tout $\mathbb{R}$. On écrit $\exp(x) = e^x$, on a $e^0 = 1$ et, pour tout réel x , $e^x > 0$. Le nombre e vaut environ 2,718.

3 2. Les propriétés algébriques

3.1 La formule fondamentale

Pour tous réels x et y ,

$$\boxed{e^{x+y} = e^x \times e^y.}$$

L'exposant d'un produit s'additionne donc dans le sens suivant : on peut remplacer un produit d'exponentielles de même base par une seule exponentielle.

En prenant $y = -x$, on obtient

$$e^x e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1,$$

donc

$$\boxed{e^{-x} = \frac{1}{e^x}.}$$

En particulier, pour tous réels x et y ,

$$\boxed{e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}.}$$

Pour un entier n , la formule se prolonge par

$$(e^x)^n = e^{nx}.$$

Il faut distinguer cette règle de la fausse égalité $e^{x+y} = e^x + e^y$, qui est en général fausse.

Exemple entièrement détaillé

Simplifions, pour tout réel x ,

$$A = \frac{e^{2x+1}e^{x-4}}{e^x}.$$

Étape 1 – regrouper le produit au numérateur.

$$e^{2x+1}e^{x-4} = e^{(2x+1)+(x-4)} = e^{3x-3}.$$

Étape 2 – diviser par l'exponentielle du dénominateur.

$$A = \frac{e^{3x-3}}{e^x} = e^{(3x-3)-x} = \boxed{e^{2x-3}}.$$

Contrôle. Les exposants ont été additionnés pour le produit puis soustraits pour le quotient. Aucun développement de e^x n'était nécessaire.

3.2 Lien avec les suites géométriques

Fixons un réel a et définissons, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = e^{na}.$$

Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= e^{(n+1)a} \\ &= e^{na+a} \\ &= e^{na}e^a \\ &= u_n e^a. \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison e^a . Cela fait le lien entre une évolution à temps discret et une évolution exponentielle à temps continu.

Exemple entièrement détaillé

Une quantité est multipliée par $e^{0,2}$ à chaque période et vaut 50 au départ. Après n périodes, son modèle est

$$u_n = 50e^{0,2n}.$$

La raison de la suite est $e^{0,2}$, qui est supérieure à 1 car $0,2 > 0$. La suite est donc croissante.

3.3 Calculer une valeur avec une calculatrice

La touche e^x , souvent notée **exp** ou **e^x**, permet d'obtenir une valeur approchée. Il faut conserver quelques chiffres pendant les calculs et arrondir seulement à la fin.

Par exemple,

$$e^{0,2} \approx 1,2214, \quad 100e^{0,2} \approx 122,14.$$

L'égalité exacte est la première écriture ; le symbole $\approx$ signale le résultat arrondi.

À retenir

$e^{x+y} = e^x e^y$, $e^{-x} = 1/e^x$ et $e^{x-y} = e^x/e^y$. Pour simplifier, on ne développe pas l'exponentielle : on travaille sur ses exposants.

4 3. Dérivée, signe, variations et tangente

4.1 La dérivée de l'exponentielle

La définition donne immédiatement

$$(e^x)' = e^x.$$

La fonction exponentielle est la seule fonction usuelle qui reste identique quand on la dérive. Si u est une fonction dérivable, la dérivée composée est

$$(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}.$$

Il faut donc dériver l'exposant et conserver l'exponentielle.

Exemple entièrement détaillé

Calculons la dérivée de

$$f(x) = e^{3x-2}.$$

Étape 1 – identifier l'exposant. Posons $u(x) = 3x - 2$. Alors $u'(x) = 3$.

Étape 2 – appliquer la formule de composition.

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = 3e^{3x-2}.$$

Étape 3 – étudier le signe. Pour tout x , $e^{3x-2} > 0$, donc $f'(x) > 0$. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour un réel a , la fonction $t \mapsto e^{at}$ vérifie

$$(e^{at})' = ae^{at}.$$

Ainsi, si $a > 0$, elle est croissante ; si $a < 0$, elle est décroissante ; si $a = 0$, elle est constante égale à 1.

4.2 Variations de la fonction exponentielle

Comme $e^x > 0$, on a

$$(e^x)' = e^x > 0.$$

La fonction exponentielle est donc **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$. Pour tous réels $x < y$,

$$e^x < e^y.$$

Cette propriété permet de comparer ou de résoudre des expressions exponentielles sans calculatrice.

4.3 Tangente en un point

La tangente à la courbe d'une fonction f au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Pour $f(x) = e^x$, on a $f(a) = f'(a) = e^a$. La tangente est donc

$$y = e^a + e^a(x - a).$$

En particulier, en $a = 0$, elle a pour équation

$$\boxed{y = 1 + x}.$$

La tangente donne une approximation près du point étudié : si h est petit,

$$e^h \approx 1 + h.$$

Cette approximation n'est pas une égalité pour tout h .

Exemple entièrement détaillé

Étudions la fonction

$$h(x) = e^x - x - 1.$$

Étape 1 – domaine. L'exponentielle et la fonction affine sont définies sur $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$.

Étape 2 – dérivée.

$$h'(x) = e^x - 1.$$

Étape 3 – signe de la dérivée. Comme l'exponentielle est strictement croissante et $e^0 = 1$,

$$h'(x) < 0 \text{ si } x < 0, \quad h'(0) = 0, \quad h'(x) > 0 \text{ si } x > 0.$$

Étape 4 – variations. La fonction h décroît sur $] -\infty, 0]$, puis croît sur $[0, +\infty[$. Elle atteint donc son minimum en 0.

Étape 5 – calcul du minimum.

$$h(0) = e^0 - 0 - 1 = 0.$$

On en déduit l'inégalité, valable pour tout réel x ,

$$\boxed{e^x \geq 1 + x},$$

avec égalité seulement pour $x = 0$.

À retenir

La dérivée de $e^{u(x)}$ est $u'(x)e^{u(x)}$. Comme une exponentielle est toujours positive, e^x est strictement croissante. Ne pas oublier le facteur $u'(x)$ dans une composée.

5 4. Limites et croissance comparée

5.1 Les limites de référence

Lorsque l'exposant devient très grand, l'exponentielle devient aussi grande que l'on veut. Lorsqu'il devient très négatif, elle se rapproche de zéro sans jamais l'atteindre :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty,} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.}$$

L'axe des abscisses, d'équation $y = 0$, est donc une asymptote horizontale à la courbe de e^x lorsque $x \rightarrow -\infty$.

Pour a réel, le signe de a change le sens de l'évolution :

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow +\infty$
$a > 0, e^{ax}$	0	$+\infty$
$a = 0, e^{ax}$	1	1
$a < 0, e^{ax}$	$+\infty$	0

5.2 L'exponentielle domine les puissances

À l'infini, la fonction exponentielle croît plus vite que toute puissance entière positive. Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.}$$

Une écriture équivalente, souvent pratique, est

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0.}$$

Ce résultat est utilisé en terminale pour les calculs de limites et les croissances comparées. Il ne signifie pas que x^n reste petit : les deux quantités deviennent grandes, mais l'exponentielle devient grande beaucoup plus vite.

Exemple entièrement détaillé

Calculons trois limites.

a) Exposant affine à l'infini. Comme $3x - 1 \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3x-1} = +\infty.$$

b) Quotient par une exponentielle. Le numérateur est un polynôme de degré 2, donc la croissance comparée donne

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 1}{e^x} = 0.}$$

c) Produit à gauche. Posons $t = -x$. Lorsque $x \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$, et

$$xe^x = -te^{-t}.$$

Or $te^{-t} \rightarrow 0$ par croissance comparée. Ainsi

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0.}$$

5.3 Lire une limite dans le contexte

Si $C(t) = 80e^{-0,2t}$, alors, lorsque $t \rightarrow +\infty$, $-0,2t \rightarrow -\infty$, donc $C(t) \rightarrow 0$. Le modèle décrit une quantité positive qui diminue et se rapproche de zéro. Cela ne signifie pas qu'elle devient négative.

À retenir

$e^x \rightarrow 0$ à gauche et $e^x \rightarrow +\infty$ à droite. Pour $a < 0$, e^{ax} décroît quand x augmente. À $+\infty$, l'exponentielle domine x^n pour tout entier $n \geq 1$.

6 5. Équations, inéquations et études de fonctions

6.1 Comparer deux exponentielles

La fonction exponentielle étant strictement croissante, elle conserve l'ordre : pour tous réels u et v ,

$$e^u = e^v \iff u = v,$$

$$e^u < e^v \iff u < v,$$

$$e^u \leq e^v \iff u \leq v.$$

La première équivalence exprime l'injectivité de l'exponentielle.

Exemple entièrement détaillé

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les deux problèmes suivants.

a) Équation avec la même base.

$$e^{3x-2} = e^7 \iff 3x - 2 = 7$$

$$\iff 3x = 9$$

$$\iff \boxed{x = 3}.$$

b) Inéquation.

$$e^{-2x+1} < e^5 \iff -2x + 1 < 5$$

$$\iff -2x < 4$$

$$\iff \boxed{x > -2}.$$

À la dernière étape, on divise par -2 , donc le sens de l'inégalité est inversé.

6.2 Quand le second membre n'est pas une exponentielle visible

Comme $e^u > 0$, l'équation $e^u = k$ n'a aucune solution si $k \leq 0$. Si $k > 0$, elle possède une unique solution, car la fonction exponentielle est strictement croissante et prend toutes les valeurs strictement positives.

Pour écrire cette solution exactement lorsque k n'est pas une puissance exponentielle déjà connue, on utilise la fonction logarithme népérien :

$$e^u = k \iff u = \ln(k) \quad (k > 0).$$

Cette fonction est étudiée dans le chapitre suivant. Si elle n'a pas encore été vue, on peut obtenir un encadrement ou une valeur approchée à la calculatrice, mais il faut le signaler comme tel.

6.3 Étudier une fonction contenant une exponentielle

La méthode est la même que pour les autres fonctions :

1. déterminer le domaine ;
2. calculer la dérivée en identifiant les sommes, produits et composées ;
3. factoriser la dérivée autant que possible ;

4. utiliser le fait que $e^{u(x)} > 0$ pour étudier son signe ;
5. dresser le tableau de variations et utiliser les limites utiles.

Exemple entièrement détaillé

Étudions les variations de

$$f(x) = xe^{-x}.$$

Étape 1 – domaine. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont définies sur $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Étape 2 – dérivée. Il s'agit d'un produit. Avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^{-x}$, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -e^{-x}$. Ainsi

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= e^{-x} - xe^{-x} \\ &= (1 - x)e^{-x}. \end{aligned}$$

Étape 3 – signe. Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $1 - x$:

$$f'(x) > 0 \text{ si } x < 1, \quad f'(1) = 0, \quad f'(x) < 0 \text{ si } x > 1.$$

Étape 4 – variations. La fonction croît sur $] -\infty, 1]$, puis décroît sur $[1, +\infty[$. Elle atteint son maximum en 1 :

$$f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,368.$$

Étape 5 – limites. À gauche, $xe^{-x} \rightarrow -\infty$. À droite, $xe^{-x} \rightarrow 0$ par croissance comparée. Ces limites complètent l'allure du tableau.

À retenir

Pour résoudre $e^u = e^v$, on compare les exposants. Pour une inégalité, l'exponentielle conserve le sens. Dans une étude de fonction, une exponentielle est toujours positive : elle ne change pas le signe d'un produit.

7 6. Modèles de croissance, de décroissance et équation différentielle

7.1 Le modèle continu

Une évolution exponentielle continue s'écrit souvent

$$Q(t) = Q_0 e^{kt},$$

où :

- t est le temps, exprimé dans une unité précisée ;
- $Q_0 = Q(0)$ est la valeur initiale ;
- k est le taux de croissance relatif par unité de temps.

Si $k > 0$, la quantité augmente ; si $k < 0$, elle diminue. En dérivant,

$$Q'(t) = kQ_0 e^{kt} = kQ(t).$$

La variation instantanée est donc proportionnelle à la quantité présente.

Attention aux unités. Si t est en années, le nombre k est exprimé par année. Si t est en mois, il doit être exprimé par mois. On ne peut pas mélanger directement 0,04 par an et un temps en mois sans convertir.

Exemple entièrement détaillé

Un capital de 1200 euros suit le modèle de croissance continue

$$C(t) = 1200e^{0,04t},$$

où t est exprimé en années.

Étape 1 – valeur initiale.

$$C(0) = 1200e^0 = \boxed{1200 \text{ euros}}.$$

Étape 2 – valeur après cinq ans.

$$\begin{aligned} C(5) &= 1200e^{0,04 \times 5} \\ &= 1200e^{0,2} \\ &\approx 1200 \times 1,2214 \\ &\approx \boxed{1465,7 \text{ euros}}. \end{aligned}$$

Étape 3 – sens de variation. On dérive :

$$C'(t) = 0,04 \times 1200e^{0,04t}.$$

Tous les facteurs sont positifs, donc $C'(t) > 0$. Le capital est croissant.

Étape 4 – chercher un seuil. Pour savoir quand le capital atteint 1500 euros, on écrit

$$1200e^{0,04t} = 1500 \iff e^{0,04t} = 1,25.$$

Avec le logarithme népérien,

$$0,04t = \ln(1,25), \quad t = \frac{\ln(1,25)}{0,04} \approx 5,6.$$

Le seuil est donc atteint après environ 5,6 années. Cette dernière étape sera reprise et justifiée dans le chapitre sur le logarithme.

7.2 L'équation différentielle $y' = ay$

Pour un réel a , les fonctions

$$y(t) = Ke^{at}, \quad K \in \mathbb{R},$$

vérifient

$$y'(t) = aKe^{at} = ay(t).$$

Dans le cadre du programme, on utilise le résultat suivant : les solutions de $y' = ay$ sont exactement les fonctions de cette forme. La condition initiale $y(0) = y_0$ donne

$$y_0 = Ke^0 = K,$$

donc la solution correspondant à cette condition est

$$\boxed{y(t) = y_0 e^{at}}.$$

Exemple entièrement détaillé

La quantité d'une substance est initialement de 500 milligrammes et diminue selon l'équation $y' = -0,12y$, où t est exprimé en jours.

La condition initiale donne $y_0 = 500$, et $a = -0,12$. Ainsi

$$y(t) = 500e^{-0,12t}.$$

Après dix jours,

$$\begin{aligned} y(10) &= 500e^{-1,2} \\ &\approx \boxed{150,6 \text{ milligrammes}}. \end{aligned}$$

Le signe négatif dans l'exposant traduit la décroissance.

À retenir

Un modèle continu de croissance ou de décroissance s'écrit $Q(t) = Q_0 e^{kt}$. Le signe de k indique le sens de variation et $Q'(t) = kQ(t)$. Pour $y' = ay$ et $y(0) = y_0$, la solution est $y(t) = y_0 e^{at}$.

8 Exercices gradués

Les exercices suivants sont des créations pédagogiques. Pour chacun, cherche une première démarche avant de lire l'indice. Les corrections détaillées et les réponses au rappel différé sont dans le fascicule séparé `corrections.pdf`.

Exercice 1 – Valeurs, signe et comparaison

Compétence : utiliser les premières valeurs et la croissance de l'exponentielle.

- a) Calculer exactement e^0 , e^1 et e^{-1} sous forme d'un quotient faisant intervenir e .
- b) Comparer sans calculatrice e^{-2} et e^{-1} , puis e^0 et $e^{0,5}$.
- c) Dire si e^x peut être nul ou négatif. Justifier.
- d) Donner une valeur approchée au millième de e^{-2} .

Indice.

Pour b), utiliser que l'exponentielle est strictement croissante. Pour d), utiliser la touche **exp** de la calculatrice et arrondir à la fin.

Exercice 2 – Transformer une expression

Compétence : appliquer les propriétés algébriques sans développer l'exponentielle.

Pour tout réel x , simplifier :

- a) $A = e^{2x+1}e^{x-4}$;
- b) $B = \frac{e^{5x}}{e^{2x+1}}$;
- c) $C = \frac{e^{x+2}}{e^x}$.

Indice.

Un produit additionne les exposants et un quotient les soustrait. Écris chaque étape avant de réduire l'expression affine.

Exercice 3 – Suite géométrique et croissance

Compétence : relier une formule exponentielle à une suite géométrique et interpréter un coefficient.

On considère

$$u_n = 50e^{0,08n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- a) Calculer u_0 , puis donner une valeur approchée de u_1 et u_2 au dixième.
- b) Montrer que $u_{n+1} = e^{0,08}u_n$.
- c) En déduire le sens de variation de la suite et expliquer ce que représente $e^{0,08}$.

Indice.

Dans b), écrire $0,08(n+1) = 0,08n + 0,08$. Pour c), comparer la raison à 1 en utilisant le signe de 0,08.

Exercice 4 – Dérivées et variations directes

Compétence : dériver une exponentielle composée et déterminer son signe.

Calculer la dérivée puis étudier le sens de variation de :

a) $f(x) = e^{-2x+3}$;

b) $g(x) = (x+1)e^x$.

Indice.

Pour a), dériver l'exposant $-2x+3$. Pour b), utiliser la dérivée d'un produit et factoriser par e^x avant d'étudier le signe.

Exercice 5 – Tangente et inégalité

Compétence : utiliser une étude de fonction pour démontrer une inégalité.

- a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = e^x$ au point d'abscisse 0.
- b) On pose $h(x) = e^x - x - 1$. Calculer $h'(x)$, étudier les variations de h , puis déterminer son minimum.
- c) En déduire une inégalité valable pour tout réel x , ainsi que son cas d'égalité.

Indice.

La tangente en 0 utilise $f(0) = f'(0) = 1$. Pour b), le signe de $h'(x) = e^x - 1$ se lit grâce à la croissance de l'exponentielle.

Exercice 6 – Limites et croissance comparée

Compétence : reconnaître la limite exponentielle adaptée.

Calculer :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3x-1}$;

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x+5}$;

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 7}{e^x}$;

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$.

Indice.

Commencer par étudier l'exposant. Pour c) et d), utiliser la croissance comparée après avoir éventuellement remplacé x par $-x$.

Exercice 7 – Équations et inéquations

Compétence : utiliser l'injectivité et la croissance de la fonction exponentielle.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $e^{2x-1} = e^5$;

b) $e^{-3x+2} \geq e^{-4}$;

c) $3e^{x+1} = 12$.

Pour c), donner la solution exacte avec $\ln$ si cette fonction a déjà été étudiée ; sinon expliquer pourquoi il y a une unique solution et donner une valeur approchée à la calculatrice.

Indice.

Pour a) et b), comparer directement les exposants. Pour c), isoler d'abord e^{x+1} , puis utiliser l'inverse de l'exponentielle.

Exercice 8 – Étude de la fonction xe^{-x}

Compétence : combiner produit, signe de l'exponentielle, dérivée et limites.

On considère $f(x) = xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

- a) Calculer $f'(x)$ et factoriser le résultat.
- b) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations.
- c) Calculer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
- d) Déterminer le maximum de f .

Indice.

Le signe de e^{-x} est toujours positif. Le seul changement de signe vient donc de $1 - x$.
Pour la limite à gauche, poser $t = -x$.

Exercice 9 – Problème : une population modélisée

Compétence : traduire un modèle exponentiel et interpréter un résultat avec son unité.

Le nombre de bactéries est modélisé pour $t \geq 0$, où t est le temps en heures, par

$$P(t) = 2000e^{0,06t}.$$

- a) Déterminer la population initiale et calculer $P(4)$ au dixième près.
- b) Montrer que la population est croissante.
- c) Calculer la population prévue après 12 heures, au nombre entier près.
- d) À partir de quel instant la population dépasse-t-elle 3000 ? Donner une valeur approchée au dixième d'heure et rédiger une phrase de conclusion. Le logarithme peut être utilisé pour cette question.

Indice.

Pour d), résoudre $2000e^{0,06t} > 3000$. Isoler l'exponentielle avant d'appliquer $\ln$, et ne pas oublier que t est en heures.

Exercice 10 – Synthèse : décroissance et seuil

Compétence : organiser une résolution de niveau bac autour d'un modèle et d'une équation différentielle.

La concentration d'un médicament, en milligrammes par litre, est modélisée par

$$C(t) = 90e^{-0,25t}, \quad t \geq 0,$$

où t est exprimé en heures.

- a) Donner $C(0)$ et calculer $C'(t)$. Identifier l'équation différentielle vérifiée par C .

- b) Justifier que la concentration est décroissante et qu'elle se rapproche de 0 lorsque t devient grand.
- c) Déterminer à partir de quel instant la concentration devient inférieure ou égale à 20 milligrammes par litre. Donner une valeur approchée au dixième d'heure.
- d) Interpréter le résultat dans le contexte.

Indice.

Pour c), écrire $90e^{-0,25t} \leq 20$, puis appliquer $\ln$ aux deux membres positifs. Une division par $-0,25$ inverse le sens de l'inégalité.

9 Bilan, erreurs fréquentes et rappel différé

9.1 Bilan à relire avant un exercice

1. **Définition** : $\exp$ est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. On écrit $\exp(x) = e^x$.
2. **Valeurs et signe** : $e^0 = 1$, $e^1 = e$, et $e^x > 0$ pour tout réel x .
3. **Calcul algébrique** : $e^{x+y} = e^x e^y$, $e^{-x} = 1/e^x$, $e^{x-y} = e^x / e^y$.
4. **Dérivée** : $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$.
5. **Variations** : l'exponentielle est strictement croissante; elle conserve donc l'ordre et est injective.
6. **Limites** : $e^x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow -\infty$, $e^x \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, et $x^n/e^x \rightarrow 0$ à $+\infty$ pour $n \geq 1$.
7. **Modèle** : $Q(t) = Q_0 e^{kt}$, avec le signe de k et les unités interprétés dans le contexte.

9.2 Erreurs fréquentes à analyser

- Écrire $e^{x+y} = e^x + e^y$: la formule correcte concerne un produit.
- Écrire $e^{-x} = -e^x$: un exposant négatif donne un inverse, $e^{-x} = 1/e^x$.
- Oublier que e^x est toujours strictement positif.
- Écrire $\left(e^{u(x)}\right)' = e^{u(x)}$ sans le facteur $u'(x)$.
- Résoudre $e^u = e^v$ en soustrayant les exponentielles au lieu de comparer les exposants.
- Diviser une inégalité par un nombre négatif sans inverser le sens.
- Confondre une hausse discrète de 5 %, modélisée par un facteur 1,05 par période, avec un modèle continu $e^{0,05t}$.
- Oublier l'unité du temps dans le coefficient k d'un modèle.

9.3 Auto-évaluation

Cocher une case après le travail, puis reprendre une seule compétence à la fois :

Compétence	★	★★	★★★
Je connais les valeurs et le signe de l'exponentielle.			
Je transforme un produit ou un quotient d'exponentielles.			
Je dérive $e^{u(x)}$ avec le facteur intérieur.			
J'étudie le signe d'une dérivée contenant une exponentielle.			
Je calcule une limite avec une exponentielle.			
Je construis et j'interprète un modèle $Q_0 e^{kt}$.			

9.4 Rappel différencié

À refaire deux ou trois jours plus tard, sans rouvrir le cours dans un premier temps. Les corrections sont dans le fascicule séparé.

R1. Simplifier $e^3 e^{-5}$, puis donner le signe du résultat.

R2. Pour $f(x) = e^{4x+1}$, calculer $f'(x)$.

R3. Résoudre $e^{x-2} = e^3$.

R4. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x}$ et expliquer en une phrase la méthode.

R5. Un modèle est $M(t) = 40e^{-0,1t}$. Dire ce que signifie le signe de $-0,1$ et calculer $M(0)$.

Si une question reste difficile. Revenir à la phrase qui décrit la situation : « je regroupe des exponentielles », « je dérive une composée », « je compare des exposants », « je cherche le signe d'un produit » ou « je traduis une évolution par $Q_0 e^{kt}$ ». Cette reformulation indique souvent la prochaine étape utile.