

Fiche d'histoire mathématique

La croissance continue

Du calcul des intérêts au nombre e

Idée directrice. L'exponentielle apparaît lorsque la variation d'une grandeur est proportionnelle à la grandeur elle-même. Elle est donc le modèle naturel d'une croissance ou d'une décroissance dont le rythme reste relatif : plus il y a de matière, plus la variation instantanée peut être importante.

Table des matières

1	Les intérêts composés	1
2	Napier, Euler et le nombre e	1
3	Équations différentielles et modèles	2
4	Ce que l'histoire éclaire dans le cours	2
5	Pour aller plus loin	2

1 Les intérêts composés

Avant d'être une fonction, l'exponentielle est une idée de calcul financier. Si un capital est multiplié par $1 + r$ à chaque période, après n périodes il vaut

$$C_n = C_0(1 + r)^n.$$

Au XVII^e siècle, Jacob Bernoulli étudie ce qui se passe lorsque l'on découpe une période en un grand nombre de petites périodes. La limite

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

se rapproche d'un nombre qui sera appelé e . Le nombre n'est donc pas introduit d'abord comme une curiosité : il apparaît dans une question de croissance composée.

2 Napier, Euler et le nombre e

Les logarithmes de John Napier, publiés en 1614, facilitent les multiplications et les puissances. La constante qui nous intéresse apparaît progressivement dans les tables et les problèmes de croissance.

Leonhard Euler étudie cette constante, lui donne la notation e et montre qu'elle organise les fonctions qui vérifient une relation entre valeur et variation. La fonction $x \mapsto e^x$ est caractérisée

par

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \quad e^0 = 1.$$

Cette propriété fait de l'exponentielle la fonction qui reproduit sa propre évolution locale.

3 Équations différentielles et modèles

Les équations différentielles rendent cette idée opérationnelle. Une population ou une quantité radioactive qui vérifie $y' = ay$ suit une loi exponentielle :

$$y(t) = y_0 e^{at}.$$

Si $a > 0$, la quantité croît ; si $a < 0$, elle décroît. Les mêmes équations apparaissent pour les intérêts, la désintégration radioactive, la température dans un modèle simple et la propagation d'une information.

Au XVIII^e siècle, Euler développe largement les équations différentielles et les séries. Au XIX^e siècle, l'analyse rigoureuse précise les conditions d'existence et d'unicité. Au XX^e siècle, l'exponentielle devient un outil courant de la physique et de l'ingénierie.

Repère	Apport
1614	Les logarithmes de Napier accélèrent les calculs multiplicatifs.
XVII ^e siècle	Les intérêts composés font apparaître la limite liée à e .
XVIII ^e siècle	Euler systématise e et les fonctions exponentielles.
Depuis le XIX ^e siècle	Équations différentielles et modèles de croissance.

4 Ce que l'histoire éclaire dans le cours

- Une suite géométrique décrit une croissance par étapes ; une exponentielle décrit le prolongement continu de cette idée.
- La valeur e^x est toujours positive, car une croissance multiplicative ne change pas de signe à partir d'une valeur initiale positive.
- La dérivée $y' = ay$ traduit directement « le rythme est proportionnel à la quantité présente ».
- Le logarithme sera l'opération inverse qui permet de retrouver le temps ou l'exposant.

À retenir. L'exponentielle n'est pas seulement une touche de calculatrice. Elle est le modèle historique et mathématique d'une évolution dont la variation instantanée est proportionnelle à la quantité elle-même.

5 Pour aller plus loin

- MacTutor, histoire du nombre e : The number e .
- MacTutor, notice sur Euler : Leonhard Euler.
- Pour l'autre face de l'histoire, consulter la fiche sur le logarithme népérien.