

## Baccalauréat général – spécialité mathématiques

# Corrections expliquées

Fonction logarithme népérien

À consulter après une première recherche personnelle

**Utilisation.** Cherche d’abord dans le fascicule du cours. Lis son indice si tu es bloquée, puis compare ta démarche avec la correction complète. Une rédaction différente peut être correcte si elle respecte les conditions et si elle est justifiée. Les exercices sont des créations pédagogiques ; ils ne sont pas présentés comme des sujets officiels du baccalauréat.

**Rappel de méthode.** Pour un logarithme, commencer par le domaine : l’argument doit être strictement positif. Pour une équation exponentielle, isoler l’exponentielle puis appliquer  $\ln$ . Pour une étude de fonction, enchaîner domaine, dérivée, signe, variations et limites. Une valeur approchée doit être distinguée d’une égalité exacte.

## Table des matières

|          |                                                                          |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Diagnostic : réponses et rappels ciblés</b>                           | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Corrections des exercices 1 à 3 : définition et calcul algébrique</b> | <b>5</b>  |
| <b>3</b> | <b>Corrections des exercices 4 et 5 : équation et dérivée</b>            | <b>7</b>  |
| <b>4</b> | <b>Corrections des exercices 6 et 7 : limites et inéquations</b>         | <b>8</b>  |
| <b>5</b> | <b>Corrections des exercices 8 à 10 : études et problèmes</b>            | <b>9</b>  |
| <b>6</b> | <b>Corrections du rappel différé</b>                                     | <b>11</b> |

# 1 Diagnostic : réponses et rappels ciblés

## Correction D1

Par définition de l'exponentielle,

$$e^0 = 1, \quad e^1 = e.$$

L'équation  $e^x = 5$  demande de retrouver l'exposant qui donne 5. Avec le logarithme népérien, sa solution s'écrit

$$x = \ln(5).$$

## Correction D2

On isole  $x$  en ajoutant 3 aux deux membres, puis en divisant par 2 :

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= 7, \\ 2x &= 10, \\ x &= \boxed{5}. \end{aligned}$$

## Correction D3

La racine carrée impose  $x + 1 \geq 0$ , donc  $x \geq -1$ . Le dénominateur impose  $x - 2 \neq 0$ , donc  $x \neq 2$ . Ainsi

$$\mathcal{D}_g = [-1, +\infty[ \setminus \{2\}.$$

Il faut vérifier les deux conditions simultanément.

## Correction D4

On remplace  $x$  par 2 :

$$f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 4 - 6 + 1 = \boxed{-1}.$$

La dérivée d'un polynôme se calcule terme à terme :

$$f'(x) = 2x - 3.$$

## Correction D5

Le signe de  $x - 4$  dépend de la position de  $x$  par rapport à 4 :

| $x$     | $x < 4$ | $x = 4$ | $x > 4$ |
|---------|---------|---------|---------|
| $x - 4$ | -       | 0       | +       |

## Correction D6

La fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , ses valeurs deviennent aussi grandes que l'on veut :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

## Correction D7

Une fonction strictement croissante conserve strictement l'ordre. Donc, si  $a < b$ , alors

$$\boxed{f(a) < f(b)}.$$

**Correction D8**

Une limite en  $0^+$  décrit le comportement de  $f(x)$  lorsque  $x$  se rapproche de zéro en restant positif. Elle ne demande pas que  $f(0)$  existe. La valeur  $f(0)$ , lorsqu'elle existe, est une information sur le point exact 0. Ces deux notions peuvent donc être différentes.

**Point de méthode**

Le diagnostic vérifie les bases nécessaires : domaine, calcul littéral, signe, dérivée, croissance et limites. Une difficulté sur l'un de ces gestes mérite un rappel ciblé avant de multiplier les règles de logarithme.

## 2 Corrections des exercices 1 à 3 : définition et calcul algébrique

### Correction 1 – Domaine et premières valeurs

a) L'argument du logarithme doit être strictement positif :

$$2x + 6 > 0 \iff x > -3.$$

Ainsi,

$$\mathcal{D}_f = ]-3, +\infty[.$$

b) On utilise les égalités d'inversion :

$$\boxed{\ln(1) = 0}, \quad \boxed{\ln(e^4) = 4}, \quad \boxed{e^{\ln(9)} = 9}.$$

c) On a  $0,4 < 2$ , et les deux nombres sont positifs. Comme  $\ln$  est strictement croissante,

$$\boxed{\ln(0,4) < \ln(2)}.$$

### Correction 2 – Équations réciproques

a) Comme  $5 > 0$ , on peut appliquer  $\ln$  :

$$\begin{aligned} e^{3x+1} &= 5 \iff 3x + 1 = \ln(5), \\ 3x &= \ln(5) - 1, \\ x &= \boxed{\frac{\ln(5) - 1}{3}}. \end{aligned}$$

Avec  $\ln(5) \approx 1,609$ , on obtient  $x \approx 0,20$ .

b) La condition de domaine est  $4x - 1 > 0$ , soit  $x > 1/4$ . Puis

$$\begin{aligned} \ln(4x - 1) &= -2 \iff 4x - 1 = e^{-2}, \\ 4x &= 1 + e^{-2}, \\ x &= \boxed{\frac{1 + e^{-2}}{4}}. \end{aligned}$$

Comme  $e^{-2} \approx 0,1353$ ,  $x \approx 0,28$ , qui respecte bien  $x > 1/4$ .

c) La fonction  $\ln$  est injective sur son domaine :

$$\ln(x) = \ln(7) \iff x = 7.$$

La solution est donc  $\boxed{x = 7}$ .

### Correction 3 – Transformer une expression

On utilise les formules seulement lorsque les arguments sont positifs.

a)

$$\begin{aligned} A &= \ln(12x^3) \\ &= \ln(12) + \ln(x^3) \\ &= \boxed{\ln(12) + 3\ln(x)}. \end{aligned}$$

**b)**

$$\begin{aligned} B &= \ln\left(\frac{x^2}{5y}\right) \\ &= \ln(x^2) - \ln(5y) \\ &= 2 \ln(x) - \ln(5) - \ln(y). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{B = 2 \ln(x) - \ln(5) - \ln(y)}.$$

**c)** Les coefficients deviennent des exposants et la différence devient un quotient :

$$\begin{aligned} C &= 2 \ln(x) - \ln(y) + \ln(5) \\ &= \ln(x^2) - \ln(y) + \ln(5) \\ &= \boxed{\ln\left(\frac{5x^2}{y}\right)}. \end{aligned}$$

### 3 Corrections des exercices 4 et 5 : équation et dérivée

#### Correction 4 – Équation avec un domaine

On résout

$$\ln(x-2) + \ln(x+1) = \ln(4).$$

**Étape 1 – domaine.** Il faut  $x-2 > 0$  et  $x+1 > 0$ . La condition commune est donc

$$x > 2.$$

**Étape 2 – regrouper.** Sur ce domaine,

$$\ln((x-2)(x+1)) = \ln(4).$$

Comme  $\ln$  est injective,

$$(x-2)(x+1) = 4.$$

**Étape 3 – résoudre.**

$$x^2 - x - 2 = 4,$$

$$x^2 - x - 6 = 0,$$

$$(x-3)(x+2) = 0.$$

Les racines sont 3 et  $-2$ . Le domaine  $x > 2$  élimine  $-2$ .

**Étape 4 – conclusion.** La valeur 3 vérifie bien le domaine et donne  $\ln(1) + \ln(4) = \ln(4)$ . Ainsi

$$\boxed{\mathcal{S} = \{3\}}.$$

#### Correction 5 – Dériver une fonction logarithmique

**a)** Pour  $x^2 + 1$ , on a toujours  $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ . Le domaine est donc  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ . Avec  $u(x) = x^2 + 1$  et  $u'(x) = 2x$ ,

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}}.$$

**b)** Le domaine impose  $5 - 2x > 0$ , donc  $x < 5/2$ . Avec  $u(x) = 5 - 2x$  et  $u'(x) = -2$ ,

$$\boxed{g'(x) = -\frac{2}{5 - 2x}} \quad \text{sur } ]-\infty, 5/2[.$$

**c)** Le domaine de  $h$  est  $]0, +\infty[$ . Il s'agit d'un produit :

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} \\ &= \boxed{\ln(x) + 1}. \end{aligned}$$

## 4 Corrections des exercices 6 et 7 : limites et inéquations

### Correction 6 – Limites et croissance comparée

a) Pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $x^n \ln(x) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow 0^+$ . Avec  $n = 3$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln(x) = 0.$$

b) On sépare les termes en divisant par  $x$  :

$$\frac{7 \ln(x) + 1}{x} = 7 \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x}.$$

Les deux termes tendent vers zéro à  $+\infty$ , donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 \ln(x) + 1}{x} = 0.$$

c) La racine est une puissance :  $\sqrt{x} = x^{1/2}$ . On peut poser  $t = \sqrt{x}$ , alors  $t \rightarrow +\infty$ ,  $x = t^2$ , et

$$\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(t^2)}{t} = \frac{2 \ln(t)}{t}.$$

Le logarithme est dominé par la puissance  $t$ , donc cette expression tend vers zéro :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0.$$

### Correction 7 – Inéquation et intervalle de solutions

a) Le domaine de  $\ln(3x + 2)$  est

$$3x + 2 > 0 \iff x > -\frac{2}{3}.$$

Comme  $\ln$  est strictement croissante,

$$\begin{aligned} \ln(3x + 2) > \ln(8) &\iff 3x + 2 > 8 \\ &\iff x > 2. \end{aligned}$$

Cette solution respecte le domaine, donc

$$\mathcal{S} = ]2, +\infty[.$$

b) Les arguments imposent  $x - 1 > 0$  et  $2x + 5 > 0$ , soit  $x > 1$ . Sur ce domaine,

$$\begin{aligned} \ln(x - 1) \leq \ln(2x + 5) &\iff x - 1 \leq 2x + 5 \\ &\iff -6 \leq x. \end{aligned}$$

La condition  $x > 1$  est plus restrictive que  $x \geq -6$ . Ainsi

$$\mathcal{S} = ]1, +\infty[.$$

## 5 Corrections des exercices 8 à 10 : études et problèmes

### Correction 8 – Étude de la fonction $x \ln(x)$

a) Le logarithme impose  $x > 0$ , donc  $\mathcal{D}_f = ]0, +\infty[$ . La dérivée d'un produit donne

$$f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \boxed{\ln(x) + 1}.$$

b) Cherchons le zéro de la dérivée :

$$\begin{aligned} \ln(x) + 1 = 0 &\iff \ln(x) = -1 \\ &\iff x = e^{-1}. \end{aligned}$$

Comme  $\ln$  est croissante,  $f'(x) < 0$  pour  $0 < x < e^{-1}$ , puis  $f'(x) > 0$  pour  $x > e^{-1}$ . La fonction décroît puis croît.

c) En  $0^+$ , la croissance comparée donne

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0.$$

À l'infini,  $x \ln(x) \rightarrow +\infty$ , car les deux facteurs sont alors positifs et deviennent grands. Enfin,

$$f(e^{-1}) = e^{-1} \ln(e^{-1}) = e^{-1}(-1) = -\frac{1}{e}.$$

Le minimum est donc

$$\boxed{-\frac{1}{e}}, \quad \text{atteint pour } \boxed{x = e^{-1}}.$$

### Correction 9 – Problème : une évolution exponentielle

a) Au début,  $t = 0$ , donc

$$V(0) = 18e^0 = \boxed{18}.$$

Le modèle prévoit 18 milliers de visiteurs, soit 18 000 visiteurs si l'unité « millier » est convertie.

b) On cherche  $t$  tel que  $V(t) = 30$  :

$$\begin{aligned} 18e^{0,06t} &= 30, \\ e^{0,06t} &= \frac{30}{18} = \frac{5}{3}, \\ 0,06t &= \ln\left(\frac{5}{3}\right), \\ t &= \frac{\ln(5/3)}{0,06}. \end{aligned}$$

Avec  $\ln(5/3) \approx 0,5108$ ,

$$t \approx \frac{0,5108}{0,06} \approx 8,5.$$

Le seuil est atteint après environ  $\boxed{8,5 \text{ mois}}$ .

c) Le dépassement de 40 correspond à

$$\begin{aligned} 18e^{0,06t} > 40 &\iff e^{0,06t} > \frac{20}{9} \\ &\iff 0,06t > \ln\left(\frac{20}{9}\right) \\ &\iff t > \frac{\ln(20/9)}{0,06}. \end{aligned}$$

Or  $\ln(20/9) \approx 0,7985$ , donc le dépassement commence vers 13,3 mois. Il n'a donc pas lieu avant 12 mois. On peut aussi contrôler que  $V(12) = 18e^{0,72} \approx 37,0 < 40$ .

Non, le modèle ne prévoit pas ce dépassement avant 12 mois.

### Correction 10 – Synthèse : une fonction et une inéquation

a) Le domaine est déjà donné :  $x > 0$ . On dérive :

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Sur le domaine,  $x > 0$ . Le signe de  $g'(x)$  est donc celui de  $x-1$  :

$$g'(x) < 0 \text{ sur } ]0, 1[, \quad g'(1) = 0, \quad g'(x) > 0 \text{ sur } ]1, +\infty[.$$

b) Lorsque  $x \rightarrow 0^+$ ,  $-\ln(x) \rightarrow +\infty$ , donc  $g(x) = x - 1 - \ln(x) \rightarrow +\infty$ . Lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , le terme  $x$  domine  $\ln(x)$ , donc  $g(x) \rightarrow +\infty$ . Comme  $g$  décroît puis croît, son minimum est atteint en 1. Or

$$g(1) = 1 - 1 - \ln(1) = 0.$$

c) Le minimum de  $g$  vaut zéro. Ainsi

$$g(x) \geq 0 \text{ pour tout } x > 0,$$

avec égalité seulement pour  $x = 1$ .

d) Sur  $]0, +\infty[$ ,

$$\ln(x) \leq x - 1 \iff x - 1 - \ln(x) \geq 0 \iff g(x) \geq 0.$$

La question c) donne donc directement

$$\mathcal{S} = ]0, +\infty[.$$

L'égalité se produit seulement pour  $x = 1$ .

## 6 Corrections du rappel différé

### Correction R1

Les égalités d'inversion donnent

$$\boxed{\ln(1) = 0}, \quad \boxed{\ln(e^2) = 2}, \quad \boxed{e^{\ln(0,5)} = 0,5}.$$

Le dernier résultat est valable parce que  $0,5 > 0$ .

### Correction R2

Le domaine impose

$$5x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{5}.$$

Puis

$$\begin{aligned} \ln(5x - 1) = 0 &\iff 5x - 1 = e^0 = 1 \\ &\iff 5x = 2 \\ &\iff \boxed{x = \frac{2}{5}}. \end{aligned}$$

Cette valeur respecte bien  $x > 1/5$ .

### Correction R3

Comme  $x^2 \geq 0$ , on a  $x^2 + 4 \geq 4 > 0$  pour tout réel  $x$ . Ainsi

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}}.$$

Avec  $u(x) = x^2 + 4$  et  $u'(x) = 2x$ ,

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}}.$$

### Correction R4

La croissance comparée indique que le logarithme est dominé par toute puissance positive à l'infini :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} = 0}.$$

La limite demandée en zéro est l'une des limites fondamentales du chapitre :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0}.$$

#### Point de méthode

Pour vérifier une correction, ne compare pas seulement le résultat final : repère d'abord le domaine, la propriété utilisée et le signe des transformations. C'est cette chaîne qui permet de retrouver la méthode dans un exercice différent.