

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Fonction logarithme népérien

Retrouver un exposant et étudier une croissance lente

Un cours progressif avec exemples, exercices et indices

Objectifs

- Comprendre le logarithme népérien comme la fonction réciproque de l'exponentielle, et utiliser les deux égalités d'inversion.
- Transformer des expressions et résoudre des équations ou inéquations en respectant toujours la condition de positivité.
- Dériver une fonction contenant un logarithme et étudier ses variations.
- Utiliser les limites et la croissance comparée du logarithme dans une résolution de problème.

Cadre du chapitre. Ce fascicule est conçu pour une préparation au baccalauréat général avec l'enseignement de spécialité mathématiques. Pour une session 2027, le texte de référence est le programme de terminale publié au Bulletin officiel spécial n° 8 du 25 juillet 2019. Il demande la fonction logarithme népérien, ses propriétés algébriques, sa dérivée, ses variations, ses limites en 0 et en $+\infty$, sa courbe, son lien avec l'exponentielle et la croissance comparée avec les fonctions $x \mapsto x^n$.

Un nouveau programme a été publié au Bulletin officiel n° 14 du 2 avril 2026. Il entrera en application en classe de terminale à la rentrée 2027–2028 et reprend ce cœur de notions. Les exercices de ce fascicule sont créés pour l'apprentissage ; ils ne sont pas des sujets officiels.

Les textes institutionnels sont accessibles dans le BO spécial n° 8 de 2019 et le BO n° 14 de 2026.

Organisation conseillée. Prévoir cinq ou six séances de 35 à 45 minutes, avec une pause courte :

1. diagnostic, exponentielle et idée de fonction réciproque ;
2. définition de $\ln$, courbe et premières équations ;
3. propriétés algébriques et équations logarithmiques ;
4. dérivée, variations et tangente ;
5. limites, croissance comparée et études de fonctions ;
6. problèmes, synthèse et rappel différé.

Les exercices sont dans ce fascicule avec leurs indices. Les corrections détaillées sont dans le fascicule séparé **corrections.pdf**. Cherche d'abord seule, consulte l'indice si nécessaire, puis seulement la correction.

Table des matières

1	Avant de commencer : diagnostic et rappels	3
2	1. Le logarithme comme inverse de l'exponentielle	4
3	2. Les propriétés algébriques du logarithme	7
4	3. Dérivée, variations et tangente	10
5	4. Limites et croissance comparée	13
6	5. Équations, inéquations et applications	15
7	Exercices gradués	18
8	Bilan, erreurs fréquentes et rappel différé	21

1 Avant de commencer : diagnostic et rappels

Durée indicative : 12 à 15 minutes, sans note et sans calculatrice. Ce diagnostic sert à repérer les gestes à reprendre, pas à attribuer une note. Si une question bloque, écrire simplement « à revoir » et continuer. Les réponses sont dans le fascicule séparé des corrections.

- D1.** Calculer e^0 , e^1 et rappeler ce que signifie $e^x = 5$.
- D2.** Résoudre $2x - 3 = 7$, puis écrire la solution sous forme d'une étape par ligne.
- D3.** Déterminer l'ensemble de définition de $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$.
- D4.** Pour $f(x) = x^2 - 3x + 1$, calculer $f(2)$ et $f'(x)$.
- D5.** Donner le signe de $x - 4$ lorsque $x < 4$, lorsque $x = 4$, puis lorsque $x > 4$.
- D6.** Rappeler le sens de variation de la fonction exponentielle et sa limite lorsque x tend vers $+\infty$.
- D7.** Compléter mentalement : si $a < b$ et si une fonction est strictement croissante, alors ses images sont reliées par quelle inégalité ?
- D8.** Expliquer la différence entre une limite en 0^+ et la valeur d'une fonction en 0.

1.1 Les prérequis indispensables

Nombres positifs. Le logarithme népérien ne s'applique qu'à un nombre strictement positif. Ainsi $\ln(4)$ existe, mais $\ln(0)$ et $\ln(-3)$ n'existent pas dans le cadre des nombres réels. Pour une expression comme $\ln(2x - 1)$, il faudra donc écrire

$$2x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{2}.$$

Exponentielle. La fonction exponentielle, notée $x \mapsto e^x$, est définie sur $\mathbb{R}$, strictement croissante et à valeurs strictement positives. Elle vérifie

$$e^0 = 1, \quad e^{a+b} = e^a e^b, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Le nombre e vaut environ 2,718. Il ne faut pas le confondre avec une variable nommée e .

Fonctions et réciproques. Si une fonction associe à un nombre x un nombre y , sa réciproque permet de repartir de y pour retrouver x , lorsque cette opération est possible de manière unique. Ici, l'exponentielle envoie $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$, et le logarithme fera le chemin inverse.

Dérivation et limites. Il faut savoir lire un signe de dérivée, résoudre une inéquation simple et reconnaître les limites usuelles. Une expression comme $\frac{1}{x}$ est positive sur $]0, +\infty[$, ce qui sera essentiel pour comprendre les variations de $\ln$.

À retenir

Avant de calculer un logarithme, vérifier que son argument est strictement positif. Avant d'utiliser une propriété, identifier la fonction concernée et le domaine où la formule a un sens.

2 1. Le logarithme comme inverse de l'exponentielle

2.1 L'idée essentielle : retrouver un exposant

Supposons que l'on cherche le nombre x tel que

$$e^x = 7.$$

La calculatrice donne une valeur approchée de cet exposant, mais il est utile de disposer d'une notation exacte. Le nombre recherché est appelé le **logarithme népérien de 7** et se note $\ln(7)$:

$$e^{\ln(7)} = 7.$$

Le logarithme répond donc à la question : « quel exposant faut-il donner à e pour obtenir ce nombre positif ? »

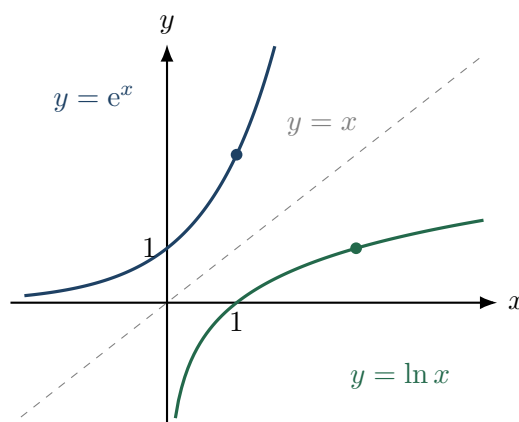


FIGURE 1 – Les courbes de $y = e^x$ et $y = \ln x$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

2.2 Définition et domaine

La fonction exponentielle est strictement croissante et prend exactement une fois chaque valeur strictement positive. Pour tout réel x strictement positif, il existe donc un unique réel y tel que $e^y = x$.

Définition. La fonction qui, à tout réel $x > 0$, associe l'unique réel y vérifiant $e^y = x$, s'appelle la fonction logarithme népérien et se note $\ln$. Son domaine est

$$\mathcal{D}_{\ln} =]0, +\infty[.$$

La définition peut se lire dans les deux sens :

$$\boxed{\ln(a) = b \iff e^b = a} \quad \text{pour } a > 0 \text{ et } b \in \mathbb{R}.$$

2.3 Les deux égalités d'inversion

Les deux fonctions se défont l'une l'autre :

$$\begin{aligned} \ln(e^x) &= x && \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \\ e^{\ln(x)} &= x && \text{pour tout } x > 0. \end{aligned}$$

Les conditions de la deuxième ligne sont importantes : $\ln(x)$ n'existe que si $x > 0$. On en déduit notamment

$$\ln(1) = 0, \quad \ln(e) = 1, \quad \ln(e^2) = 2, \quad \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1.$$

Exemple entièrement détaillé

Calculons $\ln(e^{-3})$ puis $e^{\ln(12)}$.

Étape 1 – première expression. L'exposant est déjà visible :

$$\ln(e^{-3}) = -3.$$

Étape 2 – seconde expression. L'argument 12 est strictement positif, donc la deuxième égalité d'inversion s'applique :

$$e^{\ln(12)} = 12.$$

Conclusion. Le logarithme ne transforme pas un nombre positif en un nombre forcément positif : par exemple, $0 < 0,5 < 1$ donne un logarithme négatif. Il mesure un exposant, et cet exposant peut avoir n'importe quel signe.

2.4 Résoudre une équation grâce à la définition

Pour résoudre une équation de la forme

$$e^{u(x)} = a,$$

il faut d'abord vérifier que $a > 0$, puis utiliser l'équivalence

$$e^{u(x)} = a \iff u(x) = \ln(a).$$

Exemple entièrement détaillé

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$e^{2x-1} = 7.$$

Étape 1 – reconnaître la forme. Le membre de gauche est une exponentielle et $7 > 0$, donc l'équivalence avec le logarithme est valable :

$$e^{2x-1} = 7 \iff 2x - 1 = \ln(7).$$

Étape 2 – isoler x . On ajoute 1 aux deux membres, puis on divise par 2 :

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= \ln(7), \\ 2x &= 1 + \ln(7), \\ x &= \frac{1 + \ln(7)}{2}. \end{aligned}$$

Étape 3 – valeur approchée et contrôle. Comme $\ln(7) \approx 1,946$,

$$x \approx \frac{1 + 1,946}{2} \approx 1,473.$$

En remplaçant cette valeur dans l'exposant, on obtient bien $2x - 1 \approx 1,946 = \ln(7)$, donc $e^{2x-1} \approx 7$.

$$x = \frac{1 + \ln(7)}{2} \approx 1,473.$$

Exemple entièrement détaillé

Réolvons

$$\ln(3x - 2) = 4.$$

Étape 1 – domaine. Il faut que l'argument du logarithme soit strictement positif :

$$3x - 2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x > \frac{2}{3}.$$

Étape 2 – appliquer l'exponentielle. La définition donne

$$\ln(3x - 2) = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x - 2 = e^4.$$

Étape 3 – isoler x et contrôler le domaine.

$$\begin{aligned} 3x &= 2 + e^4, \\ x &= \frac{2 + e^4}{3}. \end{aligned}$$

Cette valeur est bien supérieure à $2/3$, donc elle appartient au domaine.

$$\boxed{x = \frac{2 + e^4}{3}}.$$

À retenir

Pour $a > 0$, $e^u = a \Longleftrightarrow u = \ln(a)$ et $\ln(a) = u \Longleftrightarrow a = e^u$. Toujours vérifier la positivité de l'argument placé dans $\ln$.

3 2. Les propriétés algébriques du logarithme

3.1 Pourquoi le produit devient une somme

Soient $a > 0$ et $b > 0$. Écrivons $a = e^{\ln(a)}$ et $b = e^{\ln(b)}$. Alors

$$\begin{aligned} ab &= e^{\ln(a)} e^{\ln(b)} \\ &= e^{\ln(a) + \ln(b)}. \end{aligned}$$

En appliquant le logarithme aux deux membres, on obtient

$$\boxed{\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)}.$$

Cette formule explique l'intérêt historique des logarithmes : un calcul de produit peut être transformé en addition.

3.2 Formules à connaître

Pour tous réels $a > 0$, $b > 0$ et tout entier naturel n ,

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b), \quad (1)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b), \quad (2)$$

$$\ln(a^n) = n \ln(a). \quad (3)$$

Les deux premières formules donnent aussi

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a), \quad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a) \quad (a > 0).$$

La formule de la racine vient de $(\sqrt{a})^2 = a$. Elle n'est pas une nouvelle règle à apprendre séparément.

Attention aux faux automatismes. En général,

$$\ln(a + b) \neq \ln(a) + \ln(b).$$

Les règles concernent un produit, un quotient ou une puissance, pas une somme. Par exemple, $\ln(2 + 3) = \ln(5)$, tandis que $\ln(2) + \ln(3) = \ln(6)$: ces nombres ne sont pas égaux.

Exemple entièrement détaillé

Simplifions, en supposant $x > 0$ et $y > 0$,

$$A = \ln(4x^2) - \ln\left(\frac{y}{3}\right).$$

Étape 1 – traiter le produit et la puissance.

$$\begin{aligned} \ln(4x^2) &= \ln(4) + \ln(x^2) \\ &= \ln(4) + 2 \ln(x). \end{aligned}$$

Étape 2 – traiter le quotient.

$$\ln\left(\frac{y}{3}\right) = \ln(y) - \ln(3).$$

Étape 3 – remplacer puis réduire.

$$\begin{aligned}A &= \ln(4) + 2\ln(x) - (\ln(y) - \ln(3)) \\&= \ln(4) + \ln(3) + 2\ln(x) - \ln(y) \\&= \ln(12) + 2\ln(x) - \ln(y).\end{aligned}$$

On peut aussi regrouper en un seul logarithme :

$$A = \ln\left(\frac{12x^2}{y}\right).$$

Les deux écritures sont correctes ; la première est souvent plus pratique pour lire les termes séparément.

3.3 Résoudre une équation logarithmique

Une équation contenant plusieurs logarithmes se traite en quatre temps :

1. déterminer le domaine, donc les conditions de positivité ;
2. regrouper les logarithmes avec les formules adaptées ;
3. supprimer le logarithme en utilisant l'inversion avec l'exponentielle ;
4. garder seulement les solutions du domaine et rédiger une vérification.

Exemple entièrement détaillé

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\ln(x-1) + \ln(x+3) = \ln(5).$$

Étape 1 – domaine. Les deux arguments doivent être positifs :

$$x-1 > 0 \quad \text{et} \quad x+3 > 0.$$

La condition la plus restrictive est $x > 1$.

Étape 2 – regrouper le membre de gauche. Sur ce domaine,

$$\ln(x-1) + \ln(x+3) = \ln((x-1)(x+3)).$$

L'équation devient donc

$$\ln((x-1)(x+3)) = \ln(5).$$

Étape 3 – utiliser l'injectivité de $\ln$. La fonction logarithme est strictement croissante, donc deux images sont égales exactement lorsque les nombres de départ sont égaux :

$$(x-1)(x+3) = 5.$$

Étape 4 – résoudre l'équation obtenue.

$$\begin{aligned}x^2 + 2x - 3 &= 5, \\x^2 + 2x - 8 &= 0, \\(x-2)(x+4) &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi $x = 2$ ou $x = -4$. Mais le domaine impose $x > 1$. Il reste seulement $x = 2$, qui vérifie bien $\ln(1) + \ln(5) = \ln(5)$.

$$\boxed{\mathcal{S} = \{2\}}.$$

À retenir

Les règles de calcul portent sur les produits, les quotients et les puissances. Pour une équation logarithmique, le domaine se cherche avant les transformations : une solution trouvée hors du domaine doit être rejetée.

4 3. Dérivée, variations et tangente

4.1 Calcul de la dérivée

Le programme admet que la fonction logarithme est dérivable sur $]0, +\infty[$. On peut alors calculer sa dérivée à partir de la relation

$$e^{\ln(x)} = x \quad (x > 0).$$

En dérivant les deux membres, la dérivée du membre de gauche est obtenue par composition :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (e^{\ln(x)}) &= e^{\ln(x)} \times (\ln)'(x), \\ 1 &= x \times (\ln)'(x). \end{aligned}$$

Comme $x > 0$, on peut diviser par x :

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{pour } x > 0.$$

Plus généralement, si u est dérivable et strictement positive,

$$(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Il s'agit de la dérivée d'une composée : on dérive l'expression intérieure, puis on divise par cette expression intérieure.

Exemple entièrement détaillé

Calculons la dérivée de

$$f(x) = \ln(3x + 2).$$

Étape 1 – domaine. Il faut $3x + 2 > 0$, donc $x > -2/3$.

Étape 2 – identifier l'intérieur. On pose $u(x) = 3x + 2$, d'où $u'(x) = 3$.

Étape 3 – appliquer la formule. Sur le domaine,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{3}{3x + 2}.$$

Le dénominateur est positif sur le domaine, donc $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur $] -2/3, +\infty[$.

4.2 Variations de la fonction logarithme

Sur son domaine, $x > 0$, donc

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x} > 0.$$

La fonction logarithme népérien est donc **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$. Cela signifie que, pour $0 < a < b$,

$$\ln(a) < \ln(b).$$

Cette propriété permet notamment de comparer des logarithmes sans calculatrice.

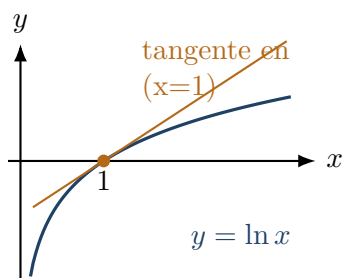


FIGURE 2 – La tangente à la courbe de $\ln$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x - 1$.

4.3 Tangente en un point

La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Pour $f(x) = \ln(x)$, avec $a > 0$, on obtient

$$y = \ln(a) + \frac{1}{a}(x - a).$$

En particulier, comme $\ln(1) = 0$, la tangente en 1 est

$$y = x - 1.$$

Cette droite donne une approximation locale : si x est proche de a , alors

$$\ln(x) \approx \ln(a) + \frac{x - a}{a}.$$

Le symbole $\approx$ signale une valeur approchée, pas une égalité exacte.

4.4 Une étude de fonction avec un logarithme

Pour étudier une fonction contenant $\ln$, on suit la méthode habituelle :

1. trouver le domaine ;
2. calculer la dérivée ;
3. étudier le signe de la dérivée ;
4. construire le tableau de variations ;
5. utiliser les limites et calculer les valeurs utiles.

Exemple entièrement détaillé

Étudions les variations de

$$f(x) = x - \ln(x).$$

Étape 1 – domaine. Le logarithme impose $x > 0$, donc $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$.

Étape 2 – dérivée.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x - 1}{x}.$$

Étape 3 – signe. Sur le domaine, $x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 1$:

x	0	1	$+\infty$
$x - 1$	–	0	+
x	+	+	
$f'(x)$	–	0	+

Étape 4 – variations et valeur au point critique. La fonction décroît sur $]0, 1[$, puis croît sur $]1, +\infty[$. Comme $f(1) = 1 - \ln(1) = 1$, elle atteint son minimum en 1, égal à 1.

$$f(x) \geq 1 \quad \text{pour tout } x > 0,$$

avec égalité seulement pour $x = 1$. Les limites qui complètent le tableau seront justifiées dans la section suivante : $f(x) \rightarrow +\infty$ aux deux extrémités du domaine.

À retenir

Sur $]0, +\infty[$, $(\ln)'(x) = 1/x > 0$, donc $\ln$ est strictement croissante. Pour $\ln(u(x))$, la dérivée est $u'(x)/u(x)$, avec la condition $u(x) > 0$.

5 4. Limites et croissance comparée

5.1 Les limites de $\ln$

La fonction exponentielle et le logarithme sont réciproques. Le comportement de l'une se lit donc à l'envers pour l'autre :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) &= +\infty.\end{aligned}$$

La notation $x \rightarrow 0^+$ signifie que x se rapproche de zéro en restant strictement positif : 0,1, 0,01, 0,001, etc. On ne calcule pas $\ln(0)$: cette valeur n'existe pas.

Comportement de x	Comportement de $\ln(x)$
$x \rightarrow 0^+$	$\ln(x) \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow +\infty$	$\ln(x) \rightarrow +\infty$

Ces limites, la dérivée positive et la relation $\ln(1) = 0$ donnent une image complète de la courbe : elle est définie seulement à droite de l'axe des ordonnées, elle descend vers $-\infty$ près de 0, passe par $(1; 0)$, puis monte lentement vers $+\infty$. L'axe $x = 0$ est une asymptote verticale.

5.2 La limite de $x \ln(x)$ en 0^+

Le facteur x tend vers zéro tandis que $\ln(x)$ tend vers $-\infty$. On ne peut donc pas conclure en multipliant simplement les deux limites : c'est une forme indéterminée $0 \times (-\infty)$.

Posons

$$t = -\ln(x).$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, on a $t \rightarrow +\infty$, et l'égalité $x = e^{-t}$ donne

$$\begin{aligned}x \ln(x) &= e^{-t}(-t) \\ &= -\frac{t}{e^t}.\end{aligned}$$

L'exponentielle croît plus vite que la fonction affine $t \mapsto t$, donc $t/e^t \rightarrow 0$. Ainsi

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0.}$$

La limite est atteinte par valeurs négatives, car $x > 0$ et $\ln(x) < 0$ près de zéro.

5.3 Croissance comparée avec une puissance

Pour tout entier $n \geq 1$, le logarithme croît moins vite que la puissance x^n lorsque x devient très grand :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0.}$$

Pour le voir, on pose $t = \ln(x)$, donc $x = e^t$ et $t \rightarrow +\infty$:

$$\frac{\ln(x)}{x^n} = \frac{t}{e^{nt}} \rightarrow 0.$$

En remplaçant x par $1/x$, on obtient aussi, pour tout $n \geq 1$,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0.}$$

En effet, avec $u = 1/x$,

$$x^n \ln(x) = -\frac{\ln(u)}{u^n},$$

et le quotient tend vers zéro lorsque $u \rightarrow +\infty$.

Interprétation. À l'infini, $\ln(x)$ devient aussi grand que l'on veut, mais il le fait plus lentement que x , x^2 , x^3 , etc. Près de zéro, le produit d'une puissance positive par $\ln(x)$ tend vers zéro, malgré la limite $-\infty$ du logarithme seul.

Exemple entièrement détaillé

Calculons les limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 \ln(x) - 2}{x^2 + 1} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x).$$

Première limite – identifier les termes dominants. On divise le numérateur et le dénominateur par x^2 :

$$\frac{5 \ln(x) - 2}{x^2 + 1} = \frac{\frac{5 \ln(x)}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $\ln(x)/x^2 \rightarrow 0$ par croissance comparée et $1/x^2 \rightarrow 0$. Le quotient tend donc vers

$$\frac{0 - 0}{1 + 0} = 0.$$

Seconde limite – appliquer la formule de croissance comparée. Ici $n = 2$, donc directement

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x) = 0.$$

$\boxed{\text{Les deux limites valent 0.}}$

À retenir

Les deux limites fondamentales sont $\ln(x) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$ et $\ln(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$. Pourtant, $x^n \ln(x) \rightarrow 0$ en 0^+ et $\ln(x)/x^n \rightarrow 0$ à l'infini pour tout entier $n \geq 1$.

6 5. Équations, inéquations et applications

6.1 Comparer et résoudre une inéquation

Comme $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, elle conserve le sens des inégalités :

$$0 < a < b \iff \ln(a) < \ln(b).$$

De même, l'exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$a < b \iff e^a < e^b.$$

Méthode

Pour résoudre une inéquation contenant $\ln(u(x))$:

1. écrire le domaine $u(x) > 0$;
2. utiliser la croissance de $\ln$ ou appliquer l'exponentielle ;
3. résoudre l'inéquation obtenue ;
4. intersecter avec le domaine.

Exemple entièrement détaillé

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$\ln(2x - 1) \leq 3.$$

Étape 1 – domaine.

$$2x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{2}.$$

Étape 2 – comparer les arguments. Comme $\ln$ est croissante et que $3 = \ln(e^3)$,

$$\begin{aligned} \ln(2x - 1) \leq 3 &\iff \ln(2x - 1) \leq \ln(e^3) \\ &\iff 2x - 1 \leq e^3. \end{aligned}$$

Étape 3 – isoler x .

$$2x \leq 1 + e^3 \iff x \leq \frac{1 + e^3}{2}.$$

Étape 4 – croiser avec le domaine.

$$\boxed{\mathcal{S} = \left] \frac{1}{2}; \frac{1 + e^3}{2} \right] .}$$

La borne $1/2$ est exclue, car $\ln(0)$ n'existe pas ; la borne de droite est incluse car l'inégalité est large.

Exemple entièrement détaillé

Résolvons

$$\ln(x + 1) > \ln(3 - x).$$

Étape 1 – domaine commun.

$$x + 1 > 0 \quad \text{et} \quad 3 - x > 0,$$

donc $-1 < x < 3$.

Étape 2 – utiliser la croissance stricte. Sur ce domaine,

$$\ln(x+1) > \ln(3-x) \iff x+1 > 3-x.$$

Étape 3 – résoudre puis croiser.

$$2x > 2 \iff x > 1.$$

Avec $-1 < x < 3$, on obtient

$$\boxed{\mathcal{S} =]1; 3[.}$$

6.2 Modéliser une évolution

Un modèle de croissance ou de décroissance peut prendre la forme

$$Q(t) = Q_0 e^{kt},$$

où t est le temps, $Q_0 > 0$ la quantité initiale et k un réel. Pour retrouver le temps correspondant à une quantité connue $Q > 0$, on utilise le logarithme :

$$\begin{aligned} Q &= Q_0 e^{kt}, \\ \frac{Q}{Q_0} &= e^{kt}, \\ \ln\left(\frac{Q}{Q_0}\right) &= kt, \\ t &= \frac{1}{k} \ln\left(\frac{Q}{Q_0}\right) \quad (k \neq 0). \end{aligned}$$

Les unités doivent être cohérentes : si t est en années, k est en année⁻¹, et kt est sans unité.

Exemple entièrement détaillé

Une population est modélisée, en milliers d'individus, par

$$P(t) = 120e^{0,08t},$$

où t est exprimé en années depuis le début de l'étude. Au bout de combien de temps la population atteint-elle 200 milliers d'individus ?

Étape 1 – traduire la question. On cherche t tel que

$$120e^{0,08t} = 200.$$

Étape 2 – isoler l'exponentielle.

$$e^{0,08t} = \frac{200}{120} = \frac{5}{3}.$$

Étape 3 – appliquer le logarithme.

$$0,08t = \ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

Étape 4 – isoler le temps.

$$t = \frac{\ln(5/3)}{0,08}.$$

Étape 5 – calcul approché et interprétation. Comme $\ln(5/3) \approx 0,511$,

$$t \approx \frac{0,511}{0,08} \approx 6,39.$$

La population atteint donc 200 milliers d'individus environ 6,4 ans après le début du modèle.

$$t \approx 6,4 \text{ années.}$$

6.3 Une décroissance et une inégalité

Dans un modèle $C(t) = C_0 e^{-kt}$, avec $C_0 > 0$ et $k > 0$, la quantité diminue. Pour déterminer à partir de quand elle est inférieure à un seuil, il faut penser au sens de l'inégalité. Comme $-k < 0$, une division par $-k$ inverse le sens.

Exemple entièrement détaillé

Une concentration est modélisée par

$$C(t) = 100e^{-0,12t},$$

où t est en heures. À partir de quelle durée la concentration est-elle inférieure ou égale à 20 ?

Étape 1 – écrire l'inéquation.

$$100e^{-0,12t} \leq 20.$$

Étape 2 – isoler l'exponentielle.

$$e^{-0,12t} \leq 0,2.$$

Étape 3 – appliquer $\ln$. Les deux membres sont positifs et $\ln$ est croissante :

$$-0,12t \leq \ln(0,2).$$

Étape 4 – diviser par un nombre négatif.

$$t \geq \frac{\ln(0,2)}{-0,12} = \frac{-\ln(0,2)}{0,12}.$$

Comme $\ln(0,2) \approx -1,609$,

$$t \geq \frac{1,609}{0,12} \approx 13,4.$$

La concentration devient donc inférieure ou égale à 20 à partir d'environ 13,4 heures.

$$t \in [13,4; +\infty[\text{ environ.}$$

À retenir

Dans une application, traduire d'abord le contexte en équation ou inéquation, puis isoler l'exponentielle avant d'appliquer $\ln$. Une division par un nombre négatif inverse le sens de l'inégalité. Terminer par une phrase avec l'unité.

7 Exercices gradués

Les exercices suivants sont des créations pédagogiques. Pour chacun, cherche une première démarche avant de lire l'indice. Les corrections détaillées et les réponses au rappel différé sont dans le fascicule séparé `corrections.pdf`.

Exercice 1 – Domaine et premières valeurs

Compétence : vérifier le domaine d'un logarithme et utiliser les égalités d'inversion.

- a) Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \ln(2x + 6)$.
- b) Calculer $\ln(1)$, $\ln(e^4)$ et $e^{\ln(9)}$.
- c) Comparer $\ln(0,4)$ et $\ln(2)$ sans calculatrice.

Indice.

Pour a), l'argument doit être strictement positif. Pour c), comparer d'abord les arguments et utiliser la croissance de $\ln$.

Exercice 2 – Équations réciproques

Compétence : résoudre une équation exponentielle ou logarithmique.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- a) $e^{3x+1} = 5$;
- b) $\ln(4x - 1) = -2$;
- c) $\ln(x) = \ln(7)$.

Donner une valeur approchée au centième pour les deux premières solutions.

Indice.

Dans b), écrire d'abord $4x - 1 = e^{-2}$, puis vérifier $4x - 1 > 0$. Dans c), utiliser que $\ln$ est injective.

Exercice 3 – Transformer une expression

Compétence : appliquer les propriétés algébriques du logarithme.

Pour $x > 0$ et $y > 0$, transformer :

- a) $A = \ln(12x^3)$;
- b) $B = \ln\left(\frac{x^2}{5y}\right)$;
- c) $C = 2\ln(x) - \ln(y) + \ln(5)$ en un seul logarithme.

Ne pas transformer une somme en produit sans justification.

Indice.

Traiter séparément produit, quotient et puissance. Pour c), les coefficients deviennent des exposants.

Exercice 4 – Équation avec un domaine

Compétence : résoudre une équation logarithmique en conservant les conditions de positivité.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\ln(x-2) + \ln(x+1) = \ln(4).$$

Rédiger les quatre étapes : domaine, regroupement, résolution, vérification.

Indice.

Le domaine impose $x > 2$. Après regroupement, développer $(x-2)(x+1) = 4$, puis ne garder que la racine autorisée.

Exercice 5 – Dériver une fonction logarithmique

Compétence : calculer une dérivée en vérifiant le domaine.

Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine puis calculer la dérivée :

a) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$;

b) $g(x) = \ln(5 - 2x)$;

c) $h(x) = x \ln(x)$.

Indice.

Utiliser $(\ln u)' = u'/u$ pour a) et b). Pour c), reconnaître un produit et utiliser la dérivée d'un produit.

Exercice 6 – Limites et croissance comparée

Compétence : choisir une limite usuelle adaptée.

Calculer :

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln(x)$;

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 \ln(x) + 1}{x}$;

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$, en justifiant la réponse à partir de la croissance comparée.

Indice.

La formule concerne toute puissance entière positive. Pour c), poser $t = \sqrt{x}$ ou utiliser que le logarithme est dominé par toute puissance positive.

Exercice 7 – Inéquation et intervalle de solutions

Compétence : résoudre une inéquation logarithmique avec intersection du domaine.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $\ln(3x + 2) > \ln(8)$;

b) $\ln(x - 1) \leq \ln(2x + 5)$.

Écrire les bornes ouvertes ou fermées avec soin.

Indice.

Commencer par les domaines. La fonction $\ln$ est strictement croissante, donc elle conserve le sens de l'inégalité entre ses arguments.

Exercice 8 – Étude de la fonction $x \ln(x)$ **Compétence :** combiner domaine, dérivée, signe et limites.On considère $f(x) = x \ln(x)$ sur son domaine.

- a) Déterminer le domaine et calculer $f'(x)$.
- b) Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations.
- c) Calculer les limites aux deux bornes du domaine et déterminer le minimum de f .

Indice.

On a $f'(x) = \ln(x) + 1$. Pour le signe, résoudre $\ln(x) + 1 = 0$. La limite en 0^+ est une limite de croissance comparée.

Exercice 9 – Problème : une évolution exponentielle**Compétence :** traduire un problème concret et interpréter une valeur logarithmique.

Le nombre de visiteurs mensuels d'un site est modélisé, en milliers, par

$$V(t) = 18e^{0,06t},$$

où t est le nombre de mois depuis janvier.

- a) Combien de visiteurs le modèle prévoit-il au début, c'est-à-dire pour $t = 0$?
- b) Au bout de combien de mois le modèle prévoit-il 30 milliers de visiteurs ? Donner une valeur approchée au dixième.
- c) Le modèle prévoit-il un dépassement de 40 milliers avant 12 mois ? Justifier par une inéquation.

Indice.

Pour b), résoudre $18e^{0,06t} = 30$. Pour c), résoudre d'abord $18e^{0,06t} > 40$, puis comparer le temps obtenu à 12.

Exercice 10 – Synthèse : une fonction et une inéquation**Compétence :** rédiger une étude structurée de niveau bac.

On considère la fonction

$$g(x) = x - 1 - \ln(x), \quad x > 0.$$

- a) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.
- b) Dresser le tableau de variations de g , en utilisant les limites adaptées.
- c) En déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$. Préciser le cas d'égalité.
- d) Résoudre l'inéquation $\ln(x) \leq x - 1$ sur $]0, +\infty[$, en expliquant le lien avec la question précédente.

Indice.

Le point critique est $x = 1$. Calculez $g(1)$. Pour d), déplacer les termes met l'inéquation sous la forme $g(x) \geq 0$.

8 Bilan, erreurs fréquentes et rappel différé

8.1 Bilan à relire avant un exercice

1. **Domaine** : un logarithme $\ln(u)$ exige $u > 0$.
2. **Inversion** : $\ln(a) = b \iff a = e^b$ pour $a > 0$, et $\ln(e^x) = x$.
3. **Calcul algébrique** : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$, $\ln(a^n) = n \ln(a)$ pour $a > 0$.
4. **Variations** : $(\ln)'(x) = 1/x > 0$, donc $\ln$ est strictement croissante.
5. **Limites** : $\ln(x) \rightarrow -\infty$ en 0^+ , $\ln(x) \rightarrow +\infty$ en $+\infty$, mais le logarithme est dominé par toute puissance positive à l'infini.
6. **Rédaction** : une valeur approchée doit être accompagnée de $\approx$, d'une unité si le contexte en comporte une et d'une phrase d'interprétation.

8.2 Erreurs fréquentes à analyser

- Écrire $\ln(0) = 0$: la fonction logarithme n'est pas définie en zéro.
- Écrire $\ln(a + b) = \ln(a) + \ln(b)$: la formule concerne un produit.
- Oublier le domaine avant de résoudre une équation ou une inéquation.
- Écrire $(\ln u)' = 1/u$ sans dériver u : il manque le facteur u' , donc la formule est u'/u .
- Diviser une inégalité par un nombre négatif sans inverser son sens.
- Confondre $\ln(e^x) = x$, valable pour tout réel x , avec $e^{\ln(x)} = x$, qui exige $x > 0$.

8.3 Auto-évaluation

Cocher une case après le travail, puis reprendre une seule compétence à la fois :

Compétence	★	★★	★★★
Je trouve le domaine d'une expression logarithmique.			
J'utilise correctement les deux égalités d'inversion.			
Je transforme un produit, un quotient ou une puissance.			
Je résous une équation ou une inéquation en rédigeant le domaine.			
Je calcule une dérivée et j'étudie ses variations.			
J'interprète une valeur approchée dans un problème.			

8.4 Rappel différé

À refaire deux ou trois jours plus tard, sans rouvrir le cours dans un premier temps. Les corrections sont dans le fascicule séparé.

R1. Sans calculatrice, donner $\ln(1)$, $\ln(e^2)$ et $e^{\ln(0,5)}$.

R2. Résoudre $\ln(5x - 1) = 0$ et écrire la condition de domaine.

R3. Pour $f(x) = \ln(x^2 + 4)$, donner le domaine et calculer $f'(x)$.

R4. Expliquer en une phrase pourquoi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} = 0$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)$.

Si une question reste difficile. Revenir à la ligne « domaine » avant de refaire le calcul. Puis écrire en mots la transformation souhaitée : « je cherche l'exposant », « je regroupe un produit », « je compare deux arguments positifs » ou « je cherche le signe de la dérivée ». Cette phrase indique souvent la prochaine étape utile.