

## Baccalauréat général – spécialité mathématiques

# Corrections expliquées

## Fonctions sinus et cosinus

À consulter après une première recherche personnelle

**Utilisation.** Cherche d’abord dans le fascicule du cours. Lis son indice si tu es bloquée, puis compare ta démarche avec la correction complète. Une rédaction différente peut être correcte si elle respecte les données, les conditions et les unités. Les exercices sont des créations pédagogiques ; ils ne sont pas présentés comme des sujets officiels du baccalauréat.

**Rappel de méthode.** Pour un angle, vérifier les radians et le quadrant. Pour une équation, trouver toutes les positions sur le cercle puis filtrer par l’intervalle. Pour une variation, dériver, étudier le signe et calculer les valeurs importantes. Pour un optimum concret, terminer par une phrase avec l’unité.

## Table des matières

|          |                                                                    |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Diagnostic : réponses et rappels ciblés</b>                     | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Corrections des exercices 1 à 3 : cercle et symétries</b>       | <b>5</b>  |
| <b>3</b> | <b>Corrections des exercices 4 à 6 : variations et résolution</b>  | <b>7</b>  |
| <b>4</b> | <b>Corrections des exercices 7 à 9 : fonctions et applications</b> | <b>9</b>  |
| <b>5</b> | <b>Rappel différé : réponses</b>                                   | <b>11</b> |

## 1 Diagnostic : réponses et rappels ciblés

### Correction D1 – Degrés et radians

Un tour complet vaut  $360^\circ = 2\pi$  radians. La moitié et le quart d'un tour donnent donc :

$$180^\circ = \pi, \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2}, \quad 45^\circ = \frac{\pi}{4}.$$

Réciproquement,

$$\frac{\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = 60^\circ.$$

### Correction D2 – Valeurs du cercle

On lit les quatre valeurs sur le cercle trigonométrique :

$$\boxed{\cos(0) = 1}, \quad \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1}, \quad \boxed{\cos(\pi) = -1}.$$

Enfin, le sinus est impair :

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{-\frac{1}{2}}.$$

### Correction D3 – Quadrants et signes

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} < \pi.$$

L'angle est donc dans le deuxième quadrant. Dans cette zone, l'abscisse est négative et l'ordonnée positive :

$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 0, \quad \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) > 0.}$$

### Correction D4 – Parité et périodicité

La symétrie par rapport à l'axe horizontal et le tour complet donnent :

$$\boxed{\sin(-x) = -\sin x}, \quad \boxed{\cos(-x) = \cos x},$$
$$\boxed{\sin(x + 2\pi) = \sin x}, \quad \boxed{\cos(x + 2\pi) = \cos x}.$$

### Correction D5 – Dérivée simple

On dérive terme à terme :

$$p'(x) = 3 \times 2x - 2 = \boxed{6x - 2}.$$

Le signe de  $p'(x)$  indique le sens de variation : si la dérivée est positive, la fonction monte ; si elle est négative, la fonction descend.

### Correction D6 – Équation et intervalle

$$2x + 1 = 7,$$
$$2x = 6,$$
$$x = 3.$$

La solution dans  $\mathbb{R}$  est donc  $x = 3$ . Comme  $3 \notin [0; 2]$ , il n'y a aucune solution dans cet intervalle :

$$\mathcal{S}_{[0;2]} = \emptyset.$$

### Correction D7 – Lire une variation

Sur  $[0, \pi]$ , le cosinus est décroissant. Aux extrémités :

$$\cos(0) = 1, \quad \cos(\pi) = -1.$$

La fonction passe donc de 1 à  $-1$  en diminuant.

### Correction D8 – Réglage de la calculatrice

Il faut choisir le mode **radians**. Le nombre 1 représente un angle de 1 radian. En mode degrés, la calculatrice interpréterait 1 comme  $1^\circ$ , ce qui correspond à un autre angle et donne une autre valeur.

#### Point de méthode

Le diagnostic montre les réflexes indispensables : convertir les angles, lire les signes sur le cercle, utiliser les symétries, dériver une expression simple et respecter un intervalle.

## 2 Corrections des exercices 1 à 3 : cercle et symétries

### Correction 1 – Radian et valeurs usuelles

a) On multiplie chaque mesure en degrés par  $\pi/180$  :

$$30^\circ = 30 \frac{\pi}{180} = \boxed{\frac{\pi}{6}},$$

$$135^\circ = 135 \frac{\pi}{180} = \boxed{\frac{3\pi}{4}},$$

$$300^\circ = 300 \frac{\pi}{180} = \boxed{\frac{5\pi}{3}}.$$

b) Les valeurs usuelles et la parité donnent :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{\frac{1}{2}},$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

c) Les quatre résultats sont positifs. Pour le dernier, l'angle  $5\pi/6$  est dans le deuxième quadrant : le sinus y est positif. Pour  $-\pi/4$ , le point est dans le quatrième quadrant, où le cosinus est positif.

### Correction 2 – Se repérer sur le cercle

a) On ajoute  $2\pi$  à l'angle :

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4}.$$

Ce nombre correspond au troisième quadrant. Les deux coordonnées sont donc négatives. L'angle de référence est  $\pi/4$ , d'où

$$\boxed{\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

b) En remplaçant par les valeurs précédentes :

$$\cos^2 t + \sin^2 t = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{1}.$$

c) Comme

$$\pi < \frac{7\pi}{6} < \frac{3\pi}{2},$$

l'angle est dans le troisième quadrant. Ainsi,

$$\boxed{\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) < 0, \quad \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) < 0}.$$

### Correction 3 – Parité, périodicité et courbe

**a)** On utilise les définitions :

$$\cos(-x) = \cos x,$$

donc le cosinus est pair, et

$$\sin(-x) = -\sin x,$$

donc le sinus est impair.

**b)** Pour le sinus :

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi = \frac{5\pi}{6},$$

donc

$$\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Pour le cosinus :

$$\frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6},$$

donc

$$\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**c)** Les points à placer sont

$$(-\pi; -1), \quad \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right), \quad (0; 1), \quad \left(\frac{\pi}{2}; 0\right), \quad (\pi; -1).$$

La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, car le cosinus est pair. Elle se répète ensuite tous les  $2\pi$ .

### 3 Corrections des exercices 4 à 6 : variations et résolution

#### Correction 4 – Dériver et étudier les variations

a) Comme  $(\sin x)' = \cos x$ ,

$$f'(x) = -2 \cos x.$$

b) Le signe de  $-2 \cos x$  est l'opposé de celui de  $\cos x$ , car  $-2$  est négatif :

| Intervalle                                   | signe de $\cos x$ | signe de $f'(x)$ |
|----------------------------------------------|-------------------|------------------|
| $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$          | –                 | +                |
| $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ | +                 | –                |
| $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$            | –                 | +                |

c) On calcule les valeurs aux bornes des intervalles :

$$\begin{aligned} f(-\pi) &= 1 - 2 \sin(-\pi) = 1, \\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= 1 - 2(-1) = 3, \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 - 2(1) = -1, \\ f(\pi) &= 1 - 2 \sin(\pi) = 1. \end{aligned}$$

La fonction est donc croissante de 1 à 3, décroissante de 3 à  $-1$ , puis croissante de  $-1$  à 1. Son maximum sur l'intervalle est  $\boxed{3}$ , atteint pour  $x = -\pi/2$ , et son minimum est  $\boxed{-1}$ , atteint pour  $x = \pi/2$ .

#### Correction 5 – Équations trigonométriques

a) La valeur  $-\sqrt{3}/2$  correspond à l'angle de référence  $5\pi/6$  pour le cosinus :

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

Sur  $[-\pi, \pi]$ , les deux angles symétriques sont

$$x = -\frac{5\pi}{6} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{6}.$$

b) Le sinus vaut  $1/2$  aux angles  $\pi/6$  et  $5\pi/6$  sur une période. Ces deux angles appartiennent à  $[-\pi, \pi]$ , donc

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{6}.$$

c) Pour tout réel  $x$ ,  $-1 \leq \cos x \leq 1$ . La valeur  $1,2$  est impossible :

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

#### Correction 6 – Inéquations de cosinus

a) On pose

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Sur  $[-\pi, \pi]$ , le cosinus est inférieur ou égal à cette valeur en dehors de l'intervalle  $(-\pi/4, \pi/4)$ . Les bornes sont incluses car l'inégalité est large :

$$\mathcal{S} = \left[-\pi, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right].$$

b) Cette fois,

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

On conserve les parties où la courbe est sous la droite de niveau  $y = -1/2$  :

$$\mathcal{S} = \left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right].$$

**Point de méthode**

Dans une inéquation, les crochets dépendent du symbole : avec  $\leq$ , les points d'égalité sont conservés. Toujours tester une valeur simple, par exemple  $x = 0$  ou  $x = \pi$ , pour contrôler le résultat.

## 4 Corrections des exercices 7 à 9 : fonctions et applications

### Correction 7 – Une fonction simple

a) On dérive terme à terme :

$$g'(x) = \cos x - \sin x.$$

b) Sur  $[0, \pi/2]$ , le cosinus décroît et le sinus croît. Ils sont égaux en  $\pi/4$ , où ils valent  $\sqrt{2}/2$ . Il s'ensuit :

$$\begin{aligned} \cos x - \sin x &> 0 && \text{sur } \left[0, \frac{\pi}{4}\right[, \\ \cos x - \sin x &= 0 && \text{pour } x = \frac{\pi}{4}, \\ \cos x - \sin x &< 0 && \text{sur } \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

c) Les valeurs importantes sont

$$g(0) = 1, \quad g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

La fonction est croissante puis décroissante. Son maximum est

$$\sqrt{2} \text{ atteint pour } x = \frac{\pi}{4},$$

et son minimum vaut  $\boxed{1}$ , atteint aux deux extrémités.

### Correction 8 – Rectangle dans un quart de cercle

a) Le point  $M$  a pour coordonnées

$$M = (6 \cos x ; 6 \sin x).$$

Les côtés du rectangle mesurent donc  $6 \cos x$  cm et  $6 \sin x$  cm. Son aire est

$$A(x) = 36 \sin x \cos x \text{ cm}^2.$$

b) Sur  $[0, \pi/2]$ ,

$$\begin{aligned} A'(x) &= 36((\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)') \\ &= 36(\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= 36(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x). \end{aligned}$$

Le facteur 36 est positif. Le facteur  $\cos x + \sin x$  est positif sur  $[0, \pi/2]$ . Le signe dépend donc de  $\cos x - \sin x$  :

| $x$     | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---------|---|-----------------|-----------------|
| $A'(x)$ | + | 0               | -               |

L'aire augmente sur  $[0, \pi/4]$ , puis diminue sur  $[\pi/4, \pi/2]$ .

c) Le maximum est atteint pour

$$x = \frac{\pi}{4}.$$

Les deux côtés ont alors la longueur

$$6 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{3\sqrt{2} \text{ cm}}.$$

L'aire maximale vaut

$$A\left(\frac{\pi}{4}\right) = 36 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{18 \text{ cm}^2}.$$

### Correction 9 – Une grandeur périodique

a) La période  $T$  vérifie

$$\frac{\pi}{6}T = 2\pi.$$

En divisant par  $\pi/6$ , on obtient

$$\boxed{T = 12 \text{ heures}}.$$

Comme  $-1 \leq \cos(\cdot) \leq 1$ ,

$$12 - 4 \leq h(t) \leq 12 + 4.$$

La valeur minimale est donc  $\boxed{8}$  et la valeur maximale  $\boxed{16}$ , dans l'unité de  $h$ .

b) Pour  $t = 3$ ,

$$h(3) = 12 + 4 \cos\left(\frac{\pi}{6} \times 3\right) = 12 + 4 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{12}.$$

Pour  $t = 6$ ,

$$h(6) = 12 + 4 \cos(\pi) = 12 - 4 = \boxed{8}.$$

Les deux résultats sont exprimés dans l'unité de la grandeur modélisée.

c) On résout :

$$\begin{aligned} 12 + 4 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) &= 14, \\ \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Lorsque  $0 \leq t \leq 12$ , l'angle  $u = \frac{\pi}{6}t$  parcourt  $[0, 2\pi]$ . Sur cet intervalle,

$$u = \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad u = \frac{5\pi}{3}.$$

On revient à  $t$  :

$$\frac{\pi}{6}t = \frac{\pi}{3} \implies t = 2, \quad \frac{\pi}{6}t = \frac{5\pi}{3} \implies t = 10.$$

La grandeur vaut donc 14 aux instants  $\boxed{t = 2 \text{ heures et } t = 10 \text{ heures}}$ .

## 5 Rappel différé : réponses

### Correction R1 – Valeur et signe

Par parité et valeur usuelle :

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

L'angle  $7\pi/6$  est dans le troisième quadrant :

$$\boxed{\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}}.$$

### Correction R2 – Période et symétrie

$$\frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6},$$

donc

$$\boxed{\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}}.$$

Par périodicité et parité :

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

### Correction R3 – Équation

Le cosinus s'annule aux angles  $\pi/2$  et  $3\pi/2$  sur une période. Dans  $[-\pi, \pi]$ , cela donne les deux angles

$$\boxed{x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{2}}.$$

### Correction R4 – Dérivée

On dérive chaque terme :

$$\begin{aligned} q'(x) &= 0 + 2(\cos x)' - (\sin x)' \\ &= 2(-\sin x) - \cos x \\ &= \boxed{-2\sin x - \cos x}. \end{aligned}$$

### Correction R5 – Variation

La dérivée du cosinus est

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Sur  $]0, \pi[$ , le sinus est strictement positif, donc  $-\sin x < 0$ . Le cosinus est ainsi strictement décroissant sur  $[0, \pi]$ . Ses valeurs aux extrémités confirment le sens :  $\cos(0) = 1$  et  $\cos(\pi) = -1$ .

### Correction R6 – Analyser une erreur

Le raisonnement donne une solution correcte,  $x = \pi/3$ , mais il oublie l'autre angle symétrique et les tours complets. Comme le cosinus est pair et périodique, les solutions dans  $\mathbb{R}$  sont

$$\boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si l'intervalle était  $[-\pi, \pi]$ , on conserverait seulement

$$x = -\frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{3}.$$

**Point de méthode**

Une réponse complète à une équation trigonométrique doit préciser l'ensemble de résolution :  $\mathbb{R}$ , un intervalle ou une période. Une valeur calculée par arccos est un point de départ ; les symétries et la périodicité donnent les autres solutions.