

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Fonctions sinus et cosinus

Décrire les mouvements qui se répètent et les angles qui tournent

Un cours progressif avec exemples, exercices et indices

Objectifs

- Passer des degrés aux radians et relier un angle aux coordonnées d'un point du cercle trigonométrique.
- Utiliser les valeurs usuelles, l'encadrement, la parité et la périodicité des fonctions sinus et cosinus.
- Dériver les fonctions sinus et cosinus, étudier leurs variations et lire leurs courbes représentatives.
- Résoudre une équation ou une inéquation trigonométrique sur $[-\pi, \pi]$, puis étudier une fonction simple et un optimum.

Cadre du chapitre. Ce fascicule est conçu pour une élève préparant le baccalauréat général avec l'enseignement de spécialité mathématiques. Pour une préparation à la session 2027, le texte de référence est le programme de terminale publié au Bulletin officiel spécial n° 8 du 25 juillet 2019. Il contient les fonctions sinus et cosinus, leur parité, leur périodicité, leurs courbes, leurs dérivées et leurs variations. Il demande également de relier les courbes au cercle trigonométrique, de résoudre $\cos(x) = a$ et $\cos(x) \leq a$ sur $[-\pi, \pi]$, puis d'étudier une fonction simple construite avec des fonctions trigonométriques.

Un nouveau programme a été publié au Bulletin officiel n° 14 du 2 avril 2026. Il entrera en application en terminale à la rentrée 2027–2028. Le présent cours conserve donc le cadre détaillé utile à la session 2027 et signale les rappels de cercle, de parité et de périodicité qui facilitent la compréhension du nouveau cœur « dérivées, variations et courbes ». Les exercices sont créés pour l'apprentissage ; ils ne sont pas présentés comme des sujets officiels.

Les textes institutionnels sont accessibles dans le BO spécial n° 8 de 2019, son annexe PDF, et le BO n° 14 de 2026.

Organisation conseillée. Prévoir cinq séances de 35 à 45 minutes, avec une pause courte :

1. diagnostic, radians et cercle trigonométrique ;
2. valeurs usuelles, parité, périodicité et courbes ;
3. dérivées et variations ;
4. équations et inéquations trigonométriques ;
5. étude de fonction, optimisation géométrique et rappel différé.

Les exercices se trouvent dans ce fascicule avec leurs indices. Les corrections détaillées sont dans le fascicule séparé **corrections.pdf**. Cherche d'abord seule, consulte l'indice si nécessaire, puis seulement la correction.

Table des matières

1	Avant de commencer : diagnostic et rappels	3
2	1. Du cercle trigonométrique aux fonctions	5
3	2. Parité, périodicité et courbes	8
4	3. Résoudre des équations et des inéquations	11
5	4. Étudier une fonction construite avec sinus et cosinus	13
6	5. Exercices gradués	16
7	6. Bilan, erreurs fréquentes et rappel différé	19

1 Avant de commencer : diagnostic et rappels

Durée indicative : 12 à 15 minutes, sans note et sans calculatrice. Ce diagnostic sert à repérer les gestes à reprendre, pas à attribuer une note. Si une question bloque, écrire simplement « à revoir » et continuer. Les réponses sont dans le fascicule séparé des corrections.

Exercice D1 – Degrés et radians

Compléter les conversions :

$$180^\circ = \dots, \quad 90^\circ = \dots, \quad 45^\circ = \dots, \quad \frac{\pi}{3} \text{ radians} = \dots^\circ.$$

Exercice D2 – Valeurs du cercle

Sans calculatrice, donner :

$$\cos(0), \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \cos(\pi), \quad \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

Exercice D3 – Quadrants et signes

Un point du cercle trigonométrique correspond à l'angle $t = \frac{2\pi}{3}$. Le point est-il dans le premier, le deuxième, le troisième ou le quatrième quadrant ? Quels sont les signes de $\cos(t)$ et $\sin(t)$?

Exercice D4 – Parité et périodicité

Compléter avec $\sin$, $-\sin$, $\cos$ ou $-\cos$:

$$\sin(-x) = \dots, \quad \cos(-x) = \dots, \quad \sin(x + 2\pi) = \dots, \quad \cos(x + 2\pi) = \dots$$

Exercice D5 – Dérivée simple

Calculer la dérivée de $p(x) = 3x^2 - 2x + 1$. À quoi sert le signe de $p'(x)$ dans l'étude de p ?

Exercice D6 – Équation et intervalle

Résoudre dans $\mathbb{R}$ $2x + 1 = 7$, puis donner les solutions de cette équation qui appartiennent à l'intervalle $[0; 2]$.

Exercice D7 – Lire une variation

La fonction cosinus est-elle croissante ou décroissante sur $[0; \pi]$? Que peut-on dire de $\cos(0)$ et de $\cos(\pi)$?

Exercice D8 – Réglage de la calculatrice

Pour calculer $\cos(1)$ dans le cours, faut-il régler la calculatrice en mode degrés ou en mode radians ? Expliquer ce que représente le nombre 1.

1.1 Les prérequis indispensables

Un angle et sa mesure. Un angle peut être mesuré en degrés ou en radians. Un tour complet vaut 360° , mais aussi 2π radians. Un demi-tour vaut $180^\circ = \pi$ radians. Dans ce cours, les fonctions $\sin$ et $\cos$ utilisent les radians, sauf indication contraire.

Lire un intervalle. L'intervalle $[-\pi, \pi]$ contient ses deux bornes. Par exemple, $-\pi \leq x \leq \pi$ signifie que x est compris entre ces deux nombres, bornes incluses.

Dérivée et variations. Lorsque $f'(x) > 0$ sur un intervalle, f est croissante sur cet intervalle. Lorsque $f'(x) < 0$, f est décroissante. Il faut donc savoir déterminer le signe d'une expression simple.

Calculatrice. Pour $\cos(1)$, le 1 est un angle de 1 radian, et non un angle de 1° . Une erreur de mode peut donner un résultat numériquement plausible mais faux pour le problème étudié. Les valeurs exactes, comme $\cos(\pi/3) = 1/2$, sont à privilégier quand elles sont connues.

À retenir

Avant de calculer, identifier l'unité de l'angle. Dans tout le chapitre, une expression comme $\sin(x)$ ou $\cos(x)$ est lue en radians. Le diagnostic vérifie surtout les conversions, les signes, les dérivées et la lecture d'un intervalle. Une difficulté indique un rappel à faire, pas un échec.

2 1. Du cercle trigonométrique aux fonctions

2.1 L'idée essentielle : les coordonnées d'un point qui tourne

Imagine un point M qui se déplace sur un cercle de rayon 1, centré en l'origine O . On part du point $A(1;0)$ et on tourne dans le sens trigonométrique, c'est-à-dire dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Après une rotation d'angle x , le point atteint une position M_x .

Le nombre $\cos(x)$ est l'abscisse de M_x , et le nombre $\sin(x)$ est son ordonnée. Le sinus et le cosinus décrivent donc deux coordonnées d'un même mouvement circulaire.

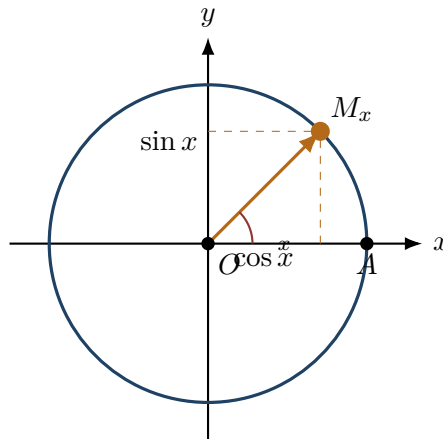


FIGURE 1 – Sur le cercle unité, $M_x = (\cos x ; \sin x)$.

2.2 Radian et cercle unité

Le **cercle trigonométrique**, ou cercle unité, est le cercle de centre O et de rayon 1, muni d'un sens positif. La mesure en radians est liée à la longueur de l'arc : un angle de 1 radian intercepte un arc de longueur 1 sur un cercle de rayon 1. Un tour complet correspond donc à la longueur du cercle, 2π , et vaut 2π radians.

Les conversions essentielles sont :

degrés	0°	90°	180°	270°	360°
radians	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Pour convertir des degrés en radians, on utilise la proportion

$$\text{mesure en radians} = \text{mesure en degrés} \times \frac{\pi}{180}.$$

Par exemple,

$$60^\circ = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}.$$

2.3 Définition et premières propriétés

Pour tout réel x , le point M_x du cercle trigonométrique a pour coordonnées

$$M_x = (\cos x ; \sin x).$$

Cette définition donne immédiatement :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$, car les coordonnées d'un point du cercle unité sont comprises entre -1 et 1 ;
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, car M_x appartient au cercle $X^2 + Y^2 = 1$;
- le signe de $\cos x$ dépend de la position à droite ou à gauche de l'axe vertical, et le signe de $\sin x$ dépend de la position au-dessus ou au-dessous de l'axe horizontal.

La notation $\cos^2 x$ signifie $(\cos x)^2$. Elle ne signifie pas $\cos(x^2)$.

Zone du cercle	Signe de $\cos x$	Signe de $\sin x$
Premier quadrant	+	+
Deuxième quadrant	−	+
Troisième quadrant	−	−
Quatrième quadrant	+	−

2.4 Valeurs usuelles

Les valeurs des angles $\pi/6$, $\pi/4$ et $\pi/3$ se déduisent de triangles particuliers. Elles sont à connaître progressivement :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

En utilisant le cercle, on complète notamment :

$$\cos(\pi) = -1, \quad \sin(\pi) = 0, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1.$$

Exemple entièrement détaillé

Déterminons $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

Étape 1 : l'angle $-2\pi/3$ est situé dans le troisième quadrant lorsqu'on le lit dans le sens positif après un tour complet :

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}.$$

Les deux coordonnées sont donc négatives.

Étape 2 : l'angle de référence est $\pi/3$. Les valeurs absolues sont donc celles de $\cos(\pi/3)$ et $\sin(\pi/3)$:

$$\left|\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right| = \frac{1}{2}, \quad \left|\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Étape 3 : on remet les signes du troisième quadrant :

$$\boxed{\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}}, \quad \boxed{\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Contrôle : $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, ce qui vérifie $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

À retenir

Sur le cercle unité, $\cos x$ est l'abscisse et $\sin x$ est l'ordonnée. Toujours vérifier le quadrant avant de choisir les signes. Les deux fonctions restent entre -1 et 1 , et $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

3 2. Parité, périodicité et courbes

3.1 Deux façons de retrouver le même point

Après un tour complet, le point revient à sa position initiale. Pour tout réel x ,

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

On dit que les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques de période 2π** . Elles recommencent le même motif tous les 2π radians.

Le point correspondant à l'angle $-x$ est le symétrique du point correspondant à x par rapport à l'axe horizontal. L'abscisse ne change pas, mais l'ordonnée change de signe :

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x.$$

La fonction cosinus est donc **paire**, et la fonction sinus est **impaire**.

Graphiquement :

- la courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;
- la courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine ;
- la périodicité permet de construire la courbe sur un intervalle puis de répéter le motif.

3.2 Courbe de la fonction sinus

Sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, la courbe de $y = \sin x$ passe par les points remarquables :

$$(-\pi; 0), \quad \left(-\frac{\pi}{2}; -1\right), \quad (0; 0), \quad \left(\frac{\pi}{2}; 1\right), \quad (\pi; 0).$$

Elle se répète ensuite avec la période 2π .

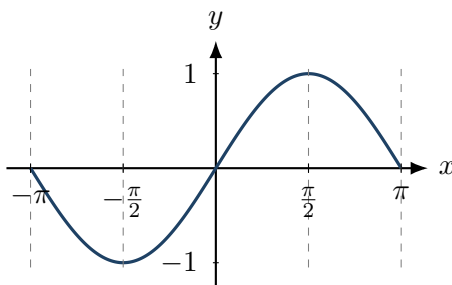


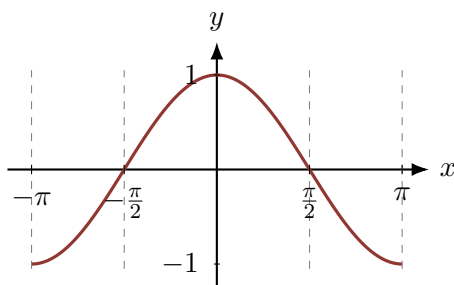
FIGURE 2 – La courbe de $y = \sin x$ sur une période centrée en 0.

3.3 Courbe de la fonction cosinus

Sur $[-\pi, \pi]$, la courbe de $y = \cos x$ passe par :

$$(-\pi; -1), \quad \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right), \quad (0; 1), \quad \left(\frac{\pi}{2}; 0\right), \quad (\pi; -1).$$

Elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, puis se répète avec la période 2π .

FIGURE 3 – La courbe de $y = \cos x$ sur une période centrée en 0.

3.4 Dérivées et variations

Les deux formules de dérivation à connaître sont :

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}, \quad \boxed{(\cos x)' = -\sin x}.$$

Elles signifient que la pente de la courbe du sinus est donnée par le cosinus, et que la pente de la courbe du cosinus est l'opposé du sinus.

Le signe de $\cos x$ donne donc les variations de $\sin x$, tandis que le signe de $-\sin x$ donne les variations de $\cos x$. Sur $[-\pi, \pi]$, pour le sinus :

Intervalle	Signe de $\cos x$	Variation de $\sin x$
$\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$	≤ 0	décroissante
$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	≥ 0	croissante
$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	≤ 0	décroissante

Pour le cosinus :

Intervalle	Signe de $-\sin x$	Variation de $\cos x$
$[-\pi, 0]$	≥ 0	croissante
$[0, \pi]$	≤ 0	décroissante

Aux bornes où la dérivée s'annule, la fonction peut changer de sens de variation : le sinus atteint un minimum en $-\pi/2$ et un maximum en $\pi/2$, tandis que le cosinus atteint un maximum en 0.

Exemple entièrement détaillé

Étudions les variations de $f(x) = 2 + \cos x$ sur $[-\pi, \pi]$.

Étape 1 : dérivée.

$$f'(x) = (2)' + (\cos x)' = 0 - \sin x = -\sin x.$$

Étape 2 : signe de la dérivée. Sur $[-\pi, 0]$, on a $\sin x \leq 0$, donc $f'(x) = -\sin x \geq 0$. Sur $[0, \pi]$, on a $\sin x \geq 0$, donc $f'(x) \leq 0$.

Étape 3 : valeurs aux points importants.

$$f(-\pi) = 2 + \cos(-\pi) = 1, \quad f(0) = 2 + \cos(0) = 3, \quad f(\pi) = 2 + \cos(\pi) = 1.$$

Conclusion : f est croissante sur $[-\pi, 0]$, puis décroissante sur $[0, \pi]$. Elle atteint son maximum 3 en $x = 0$ et son minimum 1 aux deux extrémités de l'intervalle.

À retenir

Pour étudier les variations, dériver d'abord, puis étudier le signe de la dérivée. Sur $[-\pi, \pi]$, $\cos$ monte de -1 à 1 puis redescend à -1 , tandis que $\sin$ descend jusqu'à -1 , monte jusqu'à 1 , puis redescend. La périodicité permet de répéter ces informations.

4 3. Résoudre des équations et des inéquations

4.1 Choisir un angle de référence

Pour une valeur a comprise entre -1 et 1 , la calculatrice permet de définir :

$$\alpha = \arccos(a), \quad 0 \leq \alpha \leq \pi,$$

où $\arccos(a)$ est l'angle dont le cosinus vaut a . De même,

$$\beta = \arcsin(a), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2},$$

où $\arcsin(a)$ est l'angle dont le sinus vaut a .

Attention : $\arccos(a)$ et $\arcsin(a)$ désignent des angles références. Pour trouver toutes les solutions, il faut utiliser la symétrie et la périodicité ; une seule touche de calculatrice ne donne pas toutes les solutions.

4.2 Équation cosinus sur l'intervalle de référence

Sur $[-\pi, \pi]$, la fonction cosinus est paire et sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Si $\alpha = \arccos(a)$, alors :

$$\boxed{\cos x = a \iff x = -\alpha \text{ ou } x = \alpha \text{ sur } [-\pi, \pi],}$$

Lorsque $a = 1$, les deux écritures donnent le même réel $x = 0$. Lorsque $a = -1$, elles donnent $x = -\pi$ et $x = \pi$: ces deux réels représentent le même point sur le cercle, mais restent deux nombres distincts dans $[-\pi, \pi]$. Si $a > 1$ ou $a < -1$, il n'y a aucune solution car un cosinus reste entre -1 et 1 .

Sur $\mathbb{R}$, les solutions s'écrivent :

$$\boxed{x = 2k\pi + \alpha \text{ ou } x = 2k\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}.}$$

Exemple entièrement détaillé

Réolvons $\cos x = \frac{1}{2}$ sur $[-\pi, \pi]$.

Étape 1 : la valeur $\frac{1}{2}$ est celle du cosinus de $\pi/3$, donc

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Étape 2 : la symétrie de la courbe du cosinus donne les deux abscisses opposées :

$$x = -\frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{3}.$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right\}.}$$

Contrôle graphique : aux deux angles, le point du cercle a la même abscisse $1/2$, l'un au-dessus et l'autre au-dessous de l'axe horizontal.

4.3 Équation sinus

Pour résoudre $\sin x = a$ sur $\mathbb{R}$, on pose $\beta = \arcsin(a)$. Les solutions générales sont

$$x = \beta + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \beta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Lorsque l'on travaille sur un intervalle comme $[-\pi, \pi]$, on écrit ces solutions puis on ne conserve que celles qui appartiennent à l'intervalle. Cette dernière vérification est indispensable.

4.4 Inéquation cosinus sur $[-\pi, \pi]$

Soit $-1 < a < 1$ et $\alpha = \arccos(a)$. Comme le cosinus est pair et décroît sur $[0, \pi]$,

$$\cos x \leq a \iff x \in [-\pi, -\alpha] \cup [\alpha, \pi] \quad \text{sur } [-\pi, \pi].$$

Pour une inéquation stricte, on remplace les crochets par des parenthèses aux endroits où l'égalité est exclue. Il faut aussi traiter les cas limites :

Valeur de a	Solution de $\cos x \leq a$ sur $[-\pi, \pi]$
$a < -1$	$\emptyset$
$a = -1$	$\{-\pi; \pi\}$
$a \geq 1$	$[-\pi, \pi]$

Exemple entièrement détaillé

Réolvons $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[-\pi, \pi]$.

Étape 1 : on reconnaît

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Étape 2 : sur $[0, \pi]$, le cosinus est décroissant. Il devient inférieur ou égal à $\sqrt{2}/2$ à partir de $\pi/4$.

Étape 3 : on utilise la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées :

$$\mathcal{S} = \left[-\pi, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right].$$

Contrôle : $x = \pi$ et $x = -\pi$ conviennent car le cosinus vaut -1 . En revanche $x = 0$ ne convient pas car $\cos(0) = 1$.

Méthode

Pour une équation ou une inéquation trigonométrique :

1. vérifier que la valeur demandée appartient à $[-1, 1]$;
2. trouver l'angle de référence avec une valeur exacte ou la calculatrice réglée en radians;
3. utiliser la symétrie du cercle ou de la courbe;
4. respecter l'intervalle demandé et vérifier les bornes.

À retenir

Une équation $\cos x = a$ demande toutes les abscisses du cercle ayant la valeur a , pas seulement $\arccos(a)$. Pour $\cos x \leq a$ sur $[-\pi, \pi]$, repérer les deux angles $-\arccos(a)$ et $\arccos(a)$, puis prendre les portions de la courbe situées sous la droite $y = a$.

5 4. Étudier une fonction construite avec sinus et cosinus

5.1 Une méthode en cinq étapes

Pour étudier une fonction trigonométrique simple sur un intervalle, on peut suivre cette organisation :

1. préciser l'intervalle étudié et le sens de la variable ;
2. calculer la dérivée en utilisant $(\sin x)' = \cos x$ et $(\cos x)' = -\sin x$;
3. étudier le signe de la dérivée, éventuellement en s'appuyant sur les variations et les valeurs du cercle ;
4. construire le tableau de variations ;
5. interpréter les valeurs extrêmes dans le contexte.

Exemple entièrement détaillé

Étudions $f(x) = \sin x + \cos x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Étape 1 : dérivée.

$$f'(x) = (\sin x)' + (\cos x)' = \cos x - \sin x.$$

Étape 2 : recherche du changement de signe. Sur $[0, \pi/2]$, le sinus est croissant et le cosinus est décroissant. Les deux valent $\sqrt{2}/2$ en $x = \pi/4$. Ainsi :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x - \sin x$	+	0	-

La dérivée est positive avant $\pi/4$, puis négative après.

Étape 3 : variations et valeurs.

$$f(0) = 0 + 1 = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 0 = 1.$$

Conclusion : f est croissante sur $[0, \pi/4]$, puis décroissante sur $[\pi/4, \pi/2]$. Elle atteint son maximum $\sqrt{2}$ pour $x = \pi/4$, et son minimum 1 aux deux extrémités de l'intervalle.

5.2 Application géométrique : maximiser une aire

On considère un quart de cercle de rayon $R > 0$, centré en O . Un point M du quart de cercle est repéré par un angle $x \in [0, \pi/2]$. Les projections de M sur les deux axes forment avec l'origine un rectangle.

Les coordonnées de M sont

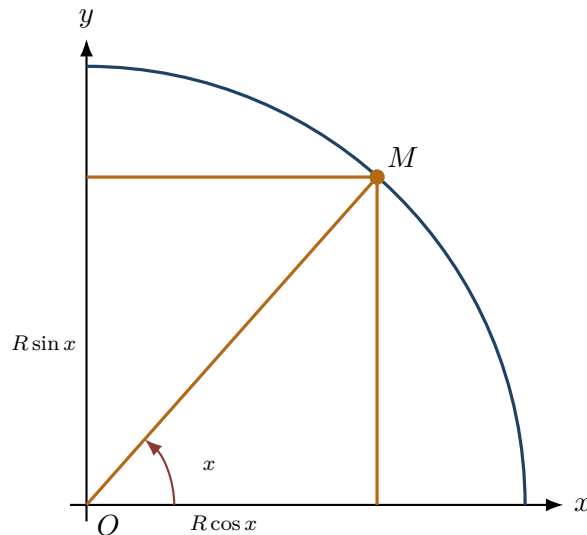
$$M = (R \cos x ; R \sin x).$$

L'aire du rectangle est donc

$$A(x) = R \cos x \times R \sin x = R^2 \sin x \cos x.$$

La fonction à optimiser est bien construite à partir de sinus et cosinus.

Exemple entièrement détaillé

FIGURE 4 – Les côtés du rectangle sont $R \cos x$ et $R \sin x$.

Déterminons la plus grande aire possible lorsque $R = 1$.

Étape 1 : domaine. L'angle varie dans $[0, \pi/2]$, donc

$$A(x) = \sin x \cos x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Étape 2 : dérivée. On utilise la dérivée d'un produit :

$$\begin{aligned} A'(x) &= (\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)' \\ &= \cos x \cos x + \sin x (-\sin x) \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x). \end{aligned}$$

Étape 3 : signe. Sur $[0, \pi/2]$, le nombre $\cos x + \sin x$ est positif. D'après les variations de sinus et cosinus, $\cos x - \sin x$ est positif avant $\pi/4$, nul en $\pi/4$, puis négatif après. Par conséquent :

$$A'(x) > 0 \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{4}\right[, \quad A'(x) < 0 \text{ sur } \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Étape 4 : conclusion. L'aire augmente puis diminue. Elle est maximale pour $x = \pi/4$:

$$A\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Le carré inscrit dans le quart de cercle est donc le rectangle de plus grande aire dans cette famille.

5.3 Donner du sens à une fonction périodique

Une fonction de la forme

$$h(t) = m + A \cos(\omega t)$$

peut modéliser une grandeur qui oscille autour d'une valeur moyenne m . Dans cette écriture, A donne l'écart maximal à la moyenne. Si $\omega > 0$, une période T vérifie

$$\omega T = 2\pi, \quad \text{donc} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Cette lecture est une application : elle ne remplace pas l'étude du domaine et des variations demandée dans un problème.

À retenir

Pour une fonction trigonométrique, le domaine de l'énoncé est important. Une valeur maximale doit être annoncée avec l'abscisse où elle est atteinte et, dans un problème concret, avec son unité. La dérivée permet de justifier l'optimum ; le dessin seul permet de conjecturer, mais pas de démontrer.

6 5. Exercices gradués

Conseil de travail. Commencer par les questions accessibles et écrire les étapes. Pour chaque exercice, la compétence travaillée est indiquée. Les indices donnent une piste ; les corrections détaillées se trouvent dans `corrections.pdf`.

Exercice 1 – Radian et valeurs usuelles (application directe)

Compétence : convertir une mesure et utiliser le tableau des valeurs.

- a) Convertir en radians 30° , 135° et 300° .
- b) Calculer exactement

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right), \quad \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right), \quad \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right).$$

- c) Pour chacune des quatre valeurs, préciser si elle est positive, négative ou nulle avant de calculer.

Indice.

Pour la première question, multiplier par $\pi/180$. Pour les angles négatifs, utiliser la parité ; pour $5\pi/6$, repérer le deuxième quadrant.

Exercice 2 – Se repérer sur le cercle (lecture et justification)

Compétence : relier un angle, un quadrant et des coordonnées.

- a) Le point M correspond à l'angle $t = -3\pi/4$. Donner les signes de ses coordonnées puis leurs valeurs exactes.
- b) Vérifier, avec les valeurs trouvées, que $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.
- c) Pour $u = 7\pi/6$, donner seulement les signes de $\cos u$ et $\sin u$, sans calculer leurs valeurs exactes.

Indice.

Ajoute 2π à l'angle négatif pour le placer entre 0 et 2π . L'angle $7\pi/6$ est dans le troisième quadrant.

Exercice 3 – Parité, périodicité et courbe (représenter)

Compétence : exploiter les symétries et la période.

- a) Dire si $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont paires ou impaires.
- b) Simplifier

$$\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right), \quad \cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)$$

en les ramenant à des angles usuels.

- c) Sur une feuille, tracer une période de la courbe de $y = \cos x$ en plaçant les cinq points d'abscisses $-\pi, -\pi/2, 0, \pi/2, \pi$. Indiquer l'axe de symétrie visible.

Indice.

Utiliser $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et les valeurs usuelles de $\sin(\pi/6)$ et $\cos(\pi/6)$.

Exercice 4 – Dériver et étudier les variations (entraînement)

Compétence : passer du signe de la dérivée aux variations. On considère $f(x) = 1 - 2 \sin x$ sur $[-\pi, \pi]$.

- a) Calculer $f'(x)$.
- b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur les trois intervalles délimités par $-\pi/2$ et $\pi/2$.
- c) Dresser le tableau de variations de f et déterminer son maximum et son minimum sur $[-\pi, \pi]$.

Indice.

Écrire $f'(x) = -2 \cos x$. Le facteur -2 inverse le signe de $\cos x$. Calculer ensuite $f(-\pi)$, $f(-\pi/2)$, $f(\pi/2)$ et $f(\pi)$.

Exercice 5 – Équations trigonométriques (méthode)

Compétence : résoudre une équation en respectant l'intervalle. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$:

- a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
- b) $\sin x = \frac{1}{2}$;
- c) $\cos x = 1, 2$.

Indice.

Pour a), repérer les deux angles du deuxième et du troisième quadrants. Pour b), utiliser le cercle puis ne garder que les angles de l'intervalle. Pour c), commencer par l'encadrement $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Exercice 6 – Inéquations de cosinus (entraînement type bac)

Compétence : traduire une courbe ou un tableau de variations en intervalles de solutions. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$:

- a) $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- b) $\cos x \leq -\frac{1}{2}$.

Représenter les solutions sur un axe gradué en multiples de π .

Indice.

Poser $\alpha = \arccos(a)$, puis utiliser $[-\pi, -\alpha] \cup [\alpha, \pi]$. La valeur $\arccos(-1/2)$ est un angle usuel.

Exercice 7 – Une fonction simple (étude complète)

Compétence : déterminer un optimum par dérivation. On considère $g(x) = \sin x + \cos x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

- a) Calculer $g'(x)$.
- b) Justifier le signe de $g'(x)$ avant et après $\pi/4$.
- c) Dresser le tableau de variations et donner la valeur maximale de g .

Indice.

Comparer le sinus et le cosinus en utilisant leurs variations et leur valeur commune en $\pi/4$. Ne pas oublier de calculer les valeurs aux extrémités.

Exercice 8 – Rectangle dans un quart de cercle (problème)

Compétence : modéliser une aire et interpréter un maximum. Un quart de cercle a pour rayon 6 cm. Un rectangle est construit comme dans le schéma du cours : l'un de ses sommets est l'origine, deux côtés sont portés par les axes et le sommet opposé M appartient à l'arc de cercle. On note $x \in [0, \pi/2]$ l'angle associé à M .

- Exprimer en fonction de x les longueurs des deux côtés du rectangle, puis son aire $A(x)$.
- Étudier les variations de A sur $[0, \pi/2]$.
- Donner l'angle qui rend l'aire maximale, les dimensions du rectangle et son aire maximale.

Indice.

Les côtés valent $6 \cos x$ et $6 \sin x$. Pour le signe de la dérivée, factoriser $\cos^2 x - \sin^2 x$ et comparer $\sin x$ et $\cos x$.

Exercice 9 – Une grandeur périodique (application)

Compétence : lire les paramètres d'un modèle trigonométrique. Sur une durée de 12 heures, une grandeur est modélisée par

$$h(t) = 12 + 4 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right), \quad 0 \leq t \leq 12,$$

où t est exprimé en heures.

- Déterminer la période du modèle et les valeurs minimale et maximale de h .
- Calculer $h(3)$ et $h(6)$, avec leurs unités.
- Déterminer les instants de $[0, 12]$ où $h(t) = 14$.

Indice.

Pour la période T , résoudre $(\pi/6)T = 2\pi$. Pour la dernière question, résoudre d'abord $\cos((\pi/6)t) = 1/2$ sur une période.

7 6. Bilan, erreurs fréquentes et rappel différé

7.1 La fiche de synthèse

Notion	À savoir faire
Cercle unité	$M_x = (\cos x; \sin x)$, avec $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $-1 \leq \sin x, \cos x \leq 1$.
Valeurs usuelles	$\cos 0 = 1, \sin 0 = 0, \cos(\pi/2) = 0, \sin(\pi/2) = 1$, puis les angles $\pi/6, \pi/4, \pi/3$.
Parité	$\cos(-x) = \cos x$: cosinus pair ; $\sin(-x) = -\sin x$: sinus impair.
Périodicité	$\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.
Dérivées	$(\sin x)' = \cos x$ et $(\cos x)' = -\sin x$.
Équation cosinus	Sur $[-\pi, \pi]$, avec $\alpha = \arccos(a)$, $x = -\alpha$ ou $x = \alpha$, puis vérifier l'intervalle.
Inéquation cosinus	Pour $-1 < a < 1$, $\cos x \leq a$ donne $[-\pi, -\alpha] \cup [\alpha, \pi]$ sur $[-\pi, \pi]$.

7.2 Erreurs fréquentes

- **Mélanger degrés et radians** : π radians correspond à 180° , pas à $3,14^\circ$.
- **Oublier le quadrant** : les valeurs absolues ne suffisent pas ; il faut remettre le bon signe à chaque coordonnée.
- **Donner une seule solution** : $\arccos(a)$ est un angle de référence, pas nécessairement l'ensemble des solutions.
- **Oublier l'intervalle** : une formule valable sur $\mathbb{R}$ doit être filtrée lorsque l'énoncé impose $[-\pi, \pi]$.
- **Lire le signe de $-\sin x$ comme celui de $\sin x$** : le coefficient -1 inverse le signe.
- **Conclure à partir d'un dessin seulement** : le graphique aide à conjecturer ; la dérivée justifie les variations et l'optimum.

7.3 Auto-évaluation

Cocher une compétence que tu sais faire seule, une compétence à revoir avec un exemple, et une compétence qui demande encore un accompagnement :

- convertir un angle et régler la calculatrice en radians ;
- retrouver les signes et les valeurs sur le cercle ;
- utiliser parité et périodicité ;
- dériver puis construire des variations ;
- résoudre $\cos x = a$ et $\cos x \leq a$ sur un intervalle ;
- rédiger une conclusion d'optimisation avec une unité.

7.4 Rappel différé

À refaire deux ou trois jours plus tard, sans relire immédiatement le cours. Les réponses sont dans le fascicule des corrections.

Exercice R1 – Valeur et signe

Calculer exactement $\cos(-\pi/3)$ et $\sin(7\pi/6)$.

Exercice R2 – Période et symétrie

Réduire $\sin(11\pi/6)$ et $\cos(-5\pi/3)$ à des valeurs usuelles.

Exercice R3 – Équation

Résoudre $\cos x = 0$ sur $[-\pi, \pi]$.

Exercice R4 – Dérivée

Calculer la dérivée de

$$q(x) = 3 + 2 \cos x - \sin x.$$

Exercice R5 – Variation

Sans recalculer toute une étude, expliquer pourquoi le cosinus est décroissant sur $[0, \pi]$.

Exercice R6 – Analyser une erreur

Une élève écrit : « $\cos x = 1/2$, donc $x = \pi/3$ pour tout réel x . » Expliquer ce qui manque dans son raisonnement et donner la forme générale des solutions.

Indice.

R1 et R2 utilisent le cercle. R3 se lit sur les deux intersections de la courbe avec l'axe horizontal. R4 utilise les deux formules de dérivation. R5 demande le signe de $-\sin x$. R6 demande parité et périodicité.

À retenir

Une solution solide comporte trois éléments : une méthode identifiable, des calculs contrôlables et une phrase de conclusion. En cas de blocage, revenir au cercle, dessiner l'intervalle demandé et distinguer l'erreur de calcul de l'erreur de méthode.