

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Corrections expliquées

Primitives, équations différentielles

À consulter après une première recherche personnelle

Utilisation. Cherche d’abord dans le fascicule du cours. Lis son indice si tu es bloquée, puis compare ta démarche avec la correction complète. Une rédaction différente peut être correcte si elle respecte les données, les conditions et les unités. Les exercices sont des créations pédagogiques ; ils ne sont pas présentés comme des sujets officiels du baccalauréat.

Rappels utiles. Une primitive F de f vérifie $F' = f$, et toutes les primitives sur un intervalle s’écrivent $F + C$. Les solutions de $y' = ay$ sont Ce^{ax} . Pour $a \neq 0$, les solutions de $y' = ay + b$ sont $-b/a + Ce^{ax}$, obtenues en commençant par la solution constante $-b/a$. Une condition initiale sert ensuite à déterminer C .

Table des matières

1	Diagnostic : réponses et rappels ciblés	3
2	Corrections des exercices 1 à 3 : primitives	5
3	Corrections des exercices 4 à 6 : équations différentielles	7
4	Corrections des exercices 7 et 8 : modélisation et Euler	8
5	Rappel différé : corrections	10

1 Diagnostic : réponses et rappels ciblés

Correction D1 – Dériver pour remonter ensuite

On dérive terme à terme :

$$\begin{aligned} p'(x) &= (2x^3)' - (5x^2)' + (4x)' - (-7)' \\ &= 6x^2 - 10x + 4. \end{aligned}$$

Pour retrouver une fonction à partir de sa dérivée, on cherche une primitive de l'expression obtenue. Autrement dit, on cherche une fonction dont la dérivée est connue.

Correction D2 – Dérivées de référence

Les trois dérivées à connaître sont

$$\boxed{(e^x)' = e^x}, \quad \boxed{(\sin x)' = \cos x}, \quad \boxed{(\cos x)' = -\sin x}.$$

Pour trouver une primitive, on lit ensuite ces égalités dans l'autre sens, en tenant compte d'un éventuel signe.

Correction D3 – Fonction composée

Pour $u(x) = (3x + 1)^2$, la dérivée de la puissance est multipliée par la dérivée de l'intérieur :

$$u'(x) = 2(3x + 1) \times 3 = 6(3x + 1).$$

Pour $v(x) = e^{2x}$, la dérivée de $2x$ vaut 2, donc

$$v'(x) = 2e^{2x}.$$

La présence de la dérivée intérieure est le réflexe à rechercher dans une primitive composée.

Correction D4 – Constante invisible

$$F'(x) = 3x^2, \quad G'(x) = (x^3 + 5)' = 3x^2.$$

Les deux fonctions ont donc la même dérivée. Le nombre 5 déplace la courbe verticalement, mais ne change aucune pente. C'est pourquoi une primitive s'écrit avec une constante C .

Correction D5 – Vérifier une équation

On dérive la fonction proposée :

$$y'(x) = 4 \times (-2)e^{-2x} = -8e^{-2x}.$$

Le membre de droite vaut

$$-2y(x) = -2 \times 4e^{-2x} = -8e^{-2x}.$$

Les deux expressions sont égales. La fonction $y(x) = 4e^{-2x}$ est donc bien solution de $y' = -2y$.

Correction D6 – Condition initiale

Dans $y(x) = Ce^{3x}$, on remplace x par 0 :

$$y(0) = Ce^0 = C.$$

La condition $y(0) = 5$ impose donc

$$\boxed{C = 5}.$$

La solution correspondante est $y(x) = 5e^{3x}$.

Correction D7 – Solution constante

Si $y(x) = k$, alors $y'(x) = 0$. En remplaçant dans l'équation,

$$0 = 2k - 6.$$

On obtient $2k = 6$, puis

$$\boxed{k = 3}.$$

La fonction constante $y(x) = 3$ est la solution d'équilibre.

Correction D8 – Unités et sens du modèle

Si $T(t) > 20$, alors $T(t) - 20 > 0$. Le produit par $-0,2$ est donc négatif :

$$T'(t) < 0.$$

La température diminue à cet instant : elle se rapproche de la température ambiante de 20°C . Le coefficient $0,2$ mesure une rapidité relative ; si t est en minutes, son unité est min^{-1} .

Point de méthode

Le diagnostic vérifie quatre réflexes : dériver, reconnaître les fonctions de référence, appliquer la règle de la chaîne et utiliser une condition initiale. Une erreur isolée indique le geste à reprendre ; elle ne remet pas en cause toute la notion.

2 Corrections des exercices 1 à 3 : primitives

Correction 1 – Lire le tableau des primitives

a) On primitive chaque terme :

$$\int 4x^3 \, dx = x^4, \quad \int -5x \, dx = -\frac{5}{2}x^2, \quad \int 7 \, dx = 7x.$$

Toutes les primitives sont donc

$$F(x) = x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 7x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

b) Sur $]0, +\infty[$, une primitive de $1/x$ est $\ln x$:

$$G(x) = \ln x + C.$$

On pourrait aussi écrire $\ln |x| + C$, qui se simplifie ici puisque $x > 0$.

c) On utilise $(e^x)' = e^x$ et $(\sin x)' = \cos x$:

$$H(x) = e^x - 2 \sin x + C.$$

En effet, $H'(x) = e^x - 2 \cos x$.

d) Comme $(2\sqrt{x})' = 1/\sqrt{x}$ pour $x > 0$,

$$K(x) = 2\sqrt{x} + C.$$

Correction 2 – Reconnaître la dérivée intérieure

a) Posons $u(x) = 3x^2 + 2$. Alors $u'(x) = 6x$, qui est le facteur présent devant la puissance :

$$F(x) = \frac{(3x^2 + 2)^5}{5} + C.$$

Le contrôle repose sur

$$F'(x) = \frac{1}{5} \times 5(3x^2 + 2)^4 \times 6x = 6x(3x^2 + 2)^4.$$

b) L'intérieur $u(x) = 2x - 1$ a pour dérivée 2. Donc

$$G(x) = e^{2x-1} + C,$$

car $G'(x) = 2e^{2x-1}$.

c) L'intérieur $u(x) = 3x + 1$ a pour dérivée 3. Sur tout intervalle ne contenant pas $-1/3$,

$$H(x) = \ln |3x + 1| + C.$$

La dérivée vaut bien $3/(3x + 1)$.

d) Avec $u(x) = 2x^2 + 5$, on a $u'(x) = 4x$. De plus, $u(x) > 0$ pour tout réel x . Ainsi,

$$K(x) = \ln(2x^2 + 5) + C.$$

Correction 3 – Une primitive fixée par sa valeur

Une primitive générale est

$$F(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3e^x + C,$$

car la dérivée de $4x^3$ est $12x^2$, celle de $-2x^2$ est $-4x$, et celle de $3e^x$ est $3e^x$.

On utilise ensuite $F(0) = 5$:

$$5 = 4 \times 0^3 - 2 \times 0^2 + 3e^0 + C = 3 + C.$$

Ainsi $C = 2$, et la fonction cherchée est

$$F(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3e^x + 2.$$

Contrôles :

$$F'(x) = 12x^2 - 4x + 3e^x, \quad F(0) = 3 + 2 = 5.$$

Les deux conditions sont vérifiées.

3 Corrections des exercices 4 à 6 : équations différentielles

Correction 4 – Équation homogène

a) Pour $u(x) = -3e^{0,5x}$,

$$u'(x) = -3 \times 0,5e^{0,5x} = -1,5e^{0,5x}.$$

D'autre part,

$$0,5u(x) = 0,5 \times (-3e^{0,5x}) = -1,5e^{0,5x}.$$

Les deux membres sont égaux : u est solution.

b) L'équation est $y' = ay$ avec $a = -4$. Toutes ses solutions sont donc

$$y(x) = Ce^{-4x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

c) On impose la condition :

$$y(0) = Ce^0 = C = 7.$$

La solution unique correspondant à la condition initiale est

$$y(x) = 7e^{-4x}.$$

Correction 5 – Équation $y' = ay + b$

Étape 1 – solution constante. Posons $y_p(x) = k$. Alors

$$0 = 3k + 12 \implies k = -4.$$

Étape 2 – solution générale. Pour $a = 3$, toutes les solutions sont

$$y(x) = k + Ce^{3x} = -4 + Ce^{3x}.$$

Étape 3 – condition initiale.

$$-1 = y(0) = -4 + C, \quad C = 3.$$

La solution cherchée est

$$y(x) = -4 + 3e^{3x}.$$

Vérification :

$$y'(x) = 9e^{3x}, \quad 3y(x) + 12 = 3(-4 + 3e^{3x}) + 12 = 9e^{3x}.$$

De plus, $y(0) = -4 + 3 = -1$.

Correction 6 – Une solution particulière est donnée

a) Posons $z = y - y_p$. Si y et y_p sont solutions de la même équation, alors

$$z' = y' - y_p' = (2y - 2x - 1) - (2y_p - 2x - 1) = 2(y - y_p) = 2z.$$

Donc $z(x) = Ce^{2x}$, et toutes les solutions sont

$$y(x) = y_p(x) + Ce^{2x} = x + 1 + Ce^{2x}.$$

b) La condition initiale donne

$$4 = y(0) = 0 + 1 + C, \quad C = 3.$$

La solution demandée est

$$y(x) = x + 1 + 3e^{2x}.$$

La méthode consiste à enlever la solution particulière : la partie restante obéit à l'équation homogène $z' = 2z$.

4 Corrections des exercices 7 et 8 : modélisation et Euler

Correction 7 – Refroidissement d'une boisson

a) On développe le membre de droite :

$$-0,2(T(t) - 20) = -0,2T(t) + 4.$$

Ainsi $a = -0,2$ et $b = 4$. La solution constante d'équilibre vérifie

$$0 = -0,2T_e + 4,$$

d'où

$$\boxed{T_e = 20^\circ\text{C}.$$

b) La forme générale est

$$T(t) = 20 + Ce^{-0,2t}.$$

Comme $T(0) = 80$,

$$80 = 20 + C, \quad C = 60.$$

Donc

$$\boxed{T(t) = 20 + 60e^{-0,2t}.$$

c) À $t = 5$,

$$T(5) = 20 + 60e^{-1}.$$

Avec $e^{-1} \approx 0,3679$,

$$T(5) \approx 20 + 60 \times 0,3679 \approx 42,1.$$

La température est donc d'environ $\boxed{42,1^\circ\text{C}}$ après cinq minutes.

d) Pour $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} T(t) \leq 30 &\iff 20 + 60e^{-0,2t} \leq 30 \\ &\iff 60e^{-0,2t} \leq 10 \\ &\iff e^{-0,2t} \leq \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

La fonction logarithme est croissante, donc

$$-0,2t \leq \ln\left(\frac{1}{6}\right) = -\ln 6.$$

En divisant par $-0,2$, on inverse le sens de l'inégalité :

$$t \geq \frac{\ln 6}{0,2} = 5 \ln 6 \approx 8,96.$$

La température devient donc inférieure ou égale à 30°C à partir d'environ $\boxed{9,0 \text{ minutes}}$. L'unité est la minute, puisque t est exprimé en minutes.

Correction 8 – Deux pas de méthode d'Euler

Ici $g(t, y) = y - 2$, $h = 0,5$, $t_0 = 0$ et $y_0 = 5$. La formule est

$$y_{n+1} = y_n + 0,5(y_n - 2).$$

Premier pas :

$$y_1 = 5 + 0,5(5 - 2) = 5 + 1,5 = 6,5.$$

Deuxième pas :

$$y_2 = 6,5 + 0,5(6,5 - 2) = 6,5 + 2,25 = 8,75.$$

Après deux pas, on est à $t_2 = 1$, donc Euler donne

$$y(1) \approx 8,75.$$

Pour obtenir la solution exacte, on cherche d'abord la constante d'équilibre 2. Les solutions sont

$$y(t) = 2 + Ce^t.$$

La condition $y(0) = 5$ donne $C = 3$, donc

$$y(1) = 2 + 3e \approx 10,15.$$

Les valeurs diffèrent parce qu'Euler remplace la courbe par une succession de segments de tangentes et utilise ici un pas de 0,5. Avec un pas plus petit, l'approximation est généralement plus précise.

Point de méthode

Dans un problème appliqué, une réponse n'est pas terminée sans son interprétation et son unité. Pour Euler, calculer la pente au point connu, multiplier par le pas, puis ajouter cette variation à la valeur courante.

5 Rappel différé : corrections

Correction R1 – Primitive courte

Sur $]0, +\infty[$, on utilise $(x^4)' = 4x^3$, $(\ln x)' = 1/x$ et $(\sin x)' = \cos x$. Toutes les primitives sont

$$F(x) = x^4 - 2 \ln x + \sin x + C.$$

En dérivant, on retrouve $4x^3 - 2/x + \cos x$.

Correction R2 – Constante de la famille

La dérivée d'une constante est nulle. Ainsi,

$$(F(x) + 7)' = F'(x) + 0 = F'(x).$$

Ajouter 7 déplace donc la courbe verticalement sans modifier ses pentes.

Correction R3 – Équation affine

Ici $a = -0,5$ et $b = 10$. La valeur d'équilibre est

$$k = -\frac{b}{a} = -\frac{10}{-0,5} = 20.$$

La solution générale est

$$y(x) = 20 + Ce^{-0,5x}.$$

La condition $y(0) = 12$ donne $12 = 20 + C$, donc $C = -8$. Finalement,

$$y(x) = 20 - 8e^{-0,5x}.$$

La solution part de 12 et se rapproche de l'équilibre 20 lorsque x augmente.

Correction R4 – Réflexe Euler

On utilise une seule fois

$$y_1 = y_0 + h(2 - y_0).$$

Avec $y_0 = 0$ et $h = 0,25$,

$$y_1 = 0 + 0,25(2 - 0) = 0,5.$$

5.1 Comment analyser une erreur

- Si la dérivée de la réponse est fausse, reprendre les coefficients et la règle de la chaîne : c'est une erreur de calcul.
- Si la bonne primitive est trouvée mais que C est oublié, ou si la solution constante n'est pas cherchée dans $y' = ay + b$, c'est une erreur de méthode.
- Si la différence entre y , y' , a et b n'est pas claire, revenir à la définition d'une solution : c'est une incompréhension de la notion à traiter avec un exemple numérique.

Point de méthode

Le contrôle final doit comporter deux parties : vérifier l'équation par dérivation et vérifier la condition initiale. Dans un contexte, ajouter la valeur, l'unité et le sens du résultat.