

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Primitives, équations différentielles

Comprendre une fonction à partir de sa vitesse de variation

Un cours progressif avec exemples, exercices et indices

Objectifs

- Rechercher et vérifier une primitive en utilisant les dérivées de référence et la dérivée d'une fonction composée.
- Comprendre pourquoi toutes les primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante et utiliser une condition initiale.
- Résoudre les équations différentielles $y' = ay$ et $y' = ay + b$, puis contrôler la solution obtenue.
- Modéliser une évolution simple, interpréter les constantes et approcher une solution par la méthode d'Euler.

Cadre du chapitre. On suppose ici que l'objectif est une préparation au baccalauréat général avec l'enseignement de spécialité mathématiques, notamment pour la session 2027. Le programme de terminale issu du Bulletin officiel spécial n° 8 du 25 juillet 2019 est alors le cadre de référence de l'année scolaire 2026–2027. Il demande notamment les primitives des fonctions de référence, la résolution de $y' = ay$, l'allure des courbes et l'étude de $y' = ay + b$. La méthode d'Euler y apparaît comme un exemple d'algorithme.

Un nouveau programme a été publié au Bulletin officiel n° 14 du 2 avril 2026, mais son application en classe de terminale est prévue à la rentrée 2027–2028. Il conserve le cœur de ce chapitre, notamment les primitives et les formes $y' = ay$ et $y' = ay + b$. Si une autre session ou une autre série est visée, le périmètre devra être vérifié séparément. Les exercices de ce fascicule sont créés pour l'apprentissage : ils ne sont pas présentés comme des sujets officiels.

Les textes institutionnels sont accessibles dans le BO spécial n° 8 de 2019, son annexe PDF, et le BO n° 14 de 2026.

Organisation conseillée. Prévoir quatre ou cinq séances de 35 à 45 minutes, avec une pause courte :

1. diagnostic, sens de la notion et primitives directes ;
2. primitives avec composition et condition initiale ;
3. équations différentielles $y' = ay$ et $y' = ay + b$;
4. modélisation et méthode d'Euler ;
5. exercices de synthèse et rappel différé.

Les exercices se trouvent dans ce fascicule avec leurs indices. Les corrections détaillées sont dans le fascicule séparé **corrections.pdf**. Cherche d'abord seule, consulte l'indice si nécessaire, puis seulement la correction.

Table des matières

1	Avant de commencer : diagnostic et rappels	3
2	1. Les primitives : inverser la dérivation	5
3	2. Équations différentielles : l'inconnue est une fonction	9
4	3. Modéliser et approcher une évolution	13
5	4. Exercices gradués	15
6	Bilan, erreurs fréquentes et rappel différé	18

1 Avant de commencer : diagnostic et rappels

Durée indicative : 12 à 15 minutes, sans note et sans calculatrice. Ce diagnostic sert à repérer les gestes à reprendre, pas à attribuer une note. Si une question bloque, écrire simplement « à revoir » et continuer. Les réponses sont dans le fascicule séparé des corrections.

Exercice D1 – Dériver pour remonter ensuite

Compétence travaillée : calculer une dérivée et comprendre le lien avec une primitive.

Calculer la dérivée de $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 7$. Que faudrait-il faire pour retrouver p à partir de p' ?

Exercice D2 – Dérivées de référence

Compétence travaillée : mobiliser les dérivées de référence.

Compléter les égalités :

$$(e^x)' = \dots, \quad (\sin x)' = \dots, \quad (\cos x)' = \dots$$

Exercice D3 – Fonction composée

Compétence travaillée : appliquer la dérivée d'une fonction composée.

Calculer les dérivées de $u(x) = (3x + 1)^2$ et de $v(x) = e^{2x}$.

Exercice D4 – Constante invisible

Compétence travaillée : comprendre le rôle de la constante dans une famille de primitives.

Comparer les fonctions $F(x) = x^3$ et $G(x) = x^3 + 5$. Ont-elles la même dérivée ? Quel est le rôle du nombre 5 ?

Exercice D5 – Vérifier une équation

Compétence travaillée : vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle.

On propose $y(x) = 4e^{-2x}$. Vérifier, par dérivation, si cette fonction est solution de $y' = -2y$.

Exercice D6 – Condition initiale

Compétence travaillée : utiliser une condition initiale pour fixer une constante.

On cherche une fonction solution de $y' = 3y$ telle que $y(0) = 5$. Quelle valeur la constante multiplicative doit-elle prendre dans une expression de la forme $y(x) = Ce^{3x}$?

Exercice D7 – Solution constante

Compétence travaillée : rechercher une solution constante d'une équation différentielle affine.

Pour l'équation $y' = 2y - 6$, on cherche une solution constante $y(x) = k$. Quelle équation le nombre k doit-il vérifier ?

Exercice D8 – Unités et sens du modèle

Compétence travaillée : interpréter le signe d'une dérivée dans un modèle avec unités.

Dans un modèle, $T(t)$ est une température en degrés Celsius et t est exprimé en minutes. Que peut signifier le signe négatif dans $T'(t) = -0,2(T(t) - 20)$ lorsque $T(t) > 20$?

1.1 Les prérequis indispensables

Dérivée. La dérivée $f'(x)$ mesure le taux de variation de f au voisinage de x . Géométriquement, elle est le coefficient directeur de la tangente à la courbe. Il faut connaître les dérivées de x^n , e^x , $\sin x$ et $\cos x$, ainsi que la dérivée d'une composée.

Calcul littéral. Il faut savoir développer une parenthèse, isoler une inconnue et résoudre une équation du premier degré. Le nombre C utilisé dans une famille de fonctions désigne une constante réelle : il ne dépend pas de x .

Lecture d'un modèle. Si $T'(t) < 0$, la température diminue au moment t . Une équation différentielle ne cherche donc pas un nombre inconnu mais une fonction inconnue qui respecte une règle de variation.

À retenir

Une primitive est une fonction dont la dérivée est la fonction donnée. Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction. Avant de calculer, repérer la fonction inconnue, sa dérivée, les constantes et la condition initiale éventuelle.

2 1. Les primitives : inverser la dérivation

2.1 L'idée essentielle : retrouver une hauteur à partir d'une pente

Supposons que l'on connaisse la pente d'une courbe en chaque point. Si cette pente vaut $2x$, la fonction $F(x) = x^2$ convient, car $F'(x) = 2x$. Mais $G(x) = x^2 + 4$ convient aussi : ajouter une hauteur constante ne change aucune pente.

La recherche d'une primitive est donc la question inverse de la dérivation : on connaît f , et l'on cherche une fonction F telle que $F' = f$.

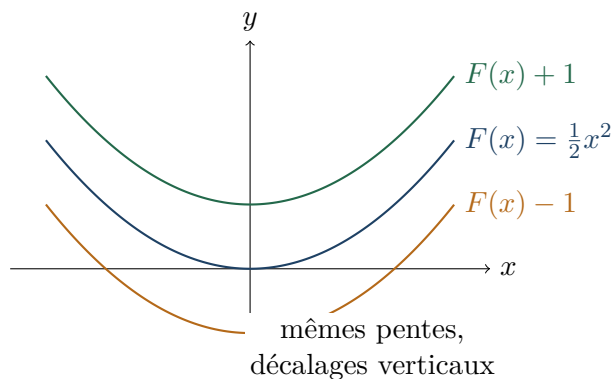


FIGURE 1 – Les courbes d'une même famille de primitives sont des translations verticales les unes des autres.

2.2 Définition et propriété fondamentale

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Une fonction F est une *primitive* de f sur I si F est dérivable sur I et

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Dire « trouver une primitive de f » revient donc à résoudre l'équation différentielle $y' = f$. Le symbole y' désigne la dérivée de la fonction inconnue y .

Propriété. Si F est une primitive de f sur un intervalle I , alors toutes les primitives de f sur I sont

$$F(x) + C \quad \text{où } C \in \mathbb{R}.$$

Pourquoi ? Si G est une autre primitive, alors

$$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0.$$

Une fonction dérivable dont la dérivée est nulle sur un intervalle est constante. Ainsi $G - F = C$, donc $G = F + C$. Réciproquement, $(F + C)' = F' = f$, car la dérivée d'une constante est nulle.

L'hypothèse « sur un intervalle » est importante : elle garantit que les points peuvent être reliés sans sortir du domaine d'étude.

2.3 Tableau des primitives de référence

Dans le tableau, on travaille sur un intervalle où les expressions sont définies. Chaque ligne signifie qu'une primitive possible est donnée, à laquelle il faut ajouter une constante réelle C .

Fonction à primitiver	Une primitive F
x^n , avec $n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$, sur un intervalle ne contenant pas 0	$\ln x $
$\frac{1}{\sqrt{x}}$, sur $]0, +\infty[$	$2\sqrt{x}$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$

Par exemple, la ligne $\sin x \mapsto -\cos x$ vient de

$$(-\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x.$$

La notation $\ln|x|$ est nécessaire pour une primitive de $1/x$ sur un intervalle négatif comme $]-\infty, 0[$, car $\ln(x)$ n'est défini que pour $x > 0$.

2.4 Linéarité : primitiver terme à terme

Si $F' = f$ et $G' = g$, et si α et β sont des constantes, alors

$$(\alpha F + \beta G)' = \alpha f + \beta g.$$

On peut donc chercher une primitive de chaque terme, puis les additionner.

Exemple entièrement détaillé

Cherchons les primitives, sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, de

$$f(x) = 6x^2 - \frac{4}{x} + 3e^{3x} - 2\sin x.$$

Étape 1 – traiter chaque terme.

$$\begin{aligned} \int 6x^2 \, dx &= 2x^3, \\ \int -\frac{4}{x} \, dx &= -4\ln|x|, \\ \int 3e^{3x} \, dx &= e^{3x}, \\ \int -2\sin x \, dx &= 2\cos x. \end{aligned}$$

Le troisième résultat utilise $(e^{3x})' = 3e^{3x}$, et le dernier utilise $(2\cos x)' = -2\sin x$.

Étape 2 – réunir les termes. Toutes les primitives sont

$$F(x) = 2x^3 - 4\ln|x| + e^{3x} + 2\cos x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Étape 3 – contrôler. En dérivant :

$$F'(x) = 6x^2 - \frac{4}{x} + 3e^{3x} - 2\sin x = f(x).$$

Le contrôle confirme aussi que le domaine doit exclure $x = 0$.

2.5 Reconnaître une composition

La dérivée d'une fonction composée permet de reconnaître les formes suivantes. Dans ce tableau, u est une fonction dérivable et u' sa dérivée.

Expression à primitiver	Une primitive
$u'(x) u(x)^n, n \neq -1$	$\frac{u(x)^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'(x)}{u(x)}, u(x) \neq 0$	$\ln u(x) $
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$
$u'(x) \cos(u(x))$	$\sin(u(x))$
$u'(x) \sin(u(x))$	$-\cos(u(x))$

Méthode

Pour chercher une primitive d'une expression composée :

1. repérer la fonction intérieure $u(x)$;
2. calculer mentalement ou sur le brouillon $u'(x)$;
3. vérifier que le facteur $u'(x)$ est bien présent, éventuellement multiplié par une constante ;
4. écrire la primitive à l'aide du tableau ;
5. dériver le résultat pour contrôler.

Exemple entièrement détaillé

Cherchons une primitive de

$$g(x) = \frac{4x}{2x^2 + 5}.$$

On reconnaît le dénominateur $u(x) = 2x^2 + 5$. Sa dérivée est $u'(x) = 4x$, exactement le numérateur. La ligne u'/u donne donc

$$G(x) = \ln(2x^2 + 5) + C.$$

Le dénominateur est strictement positif pour tout réel x , donc cette expression est définie sur $\mathbb{R}$. Le contrôle est

$$G'(x) = \frac{4x}{2x^2 + 5} = g(x).$$

2.6 Utiliser une condition initiale

Une condition comme $F(0) = 3$ permet de choisir une seule fonction dans la famille $F + C$. Elle ne change pas la dérivée ; elle fixe la hauteur de la courbe en un point.

Exemple entièrement détaillé

On cherche la primitive F de

$$F'(x) = 4x^3 - 2x + 3e^x$$

qui vérifie $F(0) = 5$.

Une primitive générale est

$$F(x) = x^4 - x^2 + 3e^x + C.$$

On applique la condition initiale :

$$F(0) = 0^4 - 0^2 + 3e^0 + C,$$

$$5 = 3 + C,$$

$$C = 2.$$

La fonction cherchée est donc

$$F(x) = x^4 - x^2 + 3e^x + 2.$$

On contrôle les deux informations : $F'(x) = 4x^3 - 2x + 3e^x$ et $F(0) = 5$.

À retenir

Pour une primitive, la constante C est indispensable tant qu'aucune condition ne fixe la hauteur.
Pour une condition initiale, écrire d'abord la famille générale, puis remplacer la valeur de x et résoudre une équation numérique en C .

3 2. Équations différentielles : l'inconnue est une fonction

3.1 Vocabulaire et vérification

Une *équation différentielle* relie une fonction inconnue y à une ou plusieurs de ses dérivées. Une *solution* est une fonction dérivable qui vérifie cette relation pour tout x de l'intervalle considéré.

Par exemple, pour vérifier si $y(x) = 2e^{3x} - 1$ est solution de

$$y' = 3(y + 1),$$

on calcule d'abord

$$y'(x) = 6e^{3x}.$$

Puis on remplace y dans le membre de droite :

$$3(y(x) + 1) = 3(2e^{3x} - 1 + 1) = 6e^{3x}.$$

Les deux membres sont égaux : la fonction est bien solution.

Dans le cas $y' = f(x)$, les solutions sont exactement les primitives de f . Les équations $y' = ay$ et $y' = ay + b$ sont différentes : le second membre dépend aussi de la fonction inconnue y .

3.2 Résoudre $y' = ay$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Les solutions de

$$y' = ay$$

sur $\mathbb{R}$ sont

$$\boxed{y(x) = Ce^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

Vérification. Si $y(x) = Ce^{ax}$, alors

$$y'(x) = aCe^{ax} = ay(x).$$

Pourquoi n'y en a-t-il pas d'autres ? Pour une solution y , considérons $z(x) = e^{-ax}y(x)$. En utilisant la dérivée d'un produit,

$$\begin{aligned} z'(x) &= (-ae^{-ax})y(x) + e^{-ax}y'(x) \\ &= e^{-ax}(y'(x) - ay(x)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

La fonction z est donc constante, disons C , et $y(x) = Ce^{ax}$. Cette démonstration explique la forme de toutes les solutions.

Si l'on impose $y(x_0) = y_0$, alors

$$y_0 = Ce^{ax_0} \implies C = y_0 e^{-ax_0},$$

et la solution s'écrit plus lisiblement

$$\boxed{y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}}.$$

Cas particulier. Si $a = 0$, l'équation devient $y' = 0$ et les solutions sont les fonctions constantes, ce que donne aussi la formule $Ce^{0x} = C$.

3.3 Allure et interprétation des solutions

La relation $y' = ay$ signifie que la vitesse de variation est proportionnelle à la valeur actuelle de y .

Valeur de a	Conséquence lorsque $y > 0$
$a > 0$	$y' = ay > 0$: la solution positive est croissante et son évolution est exponentielle.
$a < 0$	$y' = ay < 0$: la solution positive est décroissante et tend vers 0 quand x augmente.
$a = 0$	$y' = 0$: la solution est constante.

Le signe de C détermine le signe de y , car $e^{ax} > 0$. La solution nulle correspond à $C = 0$.

Exemple entièrement détaillé

Réolvons

$$y' = -0,4y, \quad y(0) = 12.$$

Étape 1 – solution générale. Ici $a = -0,4$, donc

$$y(x) = Ce^{-0,4x}.$$

Étape 2 – condition initiale.

$$y(0) = Ce^0 = C = 12.$$

Conclusion.

$$\boxed{y(x) = 12e^{-0,4x}}.$$

Comme $-0,4 < 0$ et que la valeur initiale est positive, cette solution diminue vers 0.

On vérifie : $y'(x) = -4,8e^{-0,4x} = -0,4y(x)$.

3.4 Résoudre $y' = ay + b$

On commence par le cas $a \neq 0$. On cherche une solution constante $y_p(x) = k$. Sa dérivée est nulle, donc k doit vérifier

$$0 = ak + b.$$

On obtient

$$\boxed{k = -\frac{b}{a}}.$$

Cette valeur est parfois appelée *valeur d'équilibre*.

Pour une solution quelconque y , posons

$$z(x) = y(x) - k = y(x) + \frac{b}{a}.$$

Alors

$$\begin{aligned} z'(x) &= y'(x) \\ &= ay(x) + b \\ &= a(z(x) + k) + b \\ &= az(x) + (ak + b) \\ &= az(x). \end{aligned}$$

La fonction z vérifie donc l'équation homogène $z' = az$. Ainsi,

$$y(x) = -\frac{b}{a} + Ce^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Si une condition $y(x_0) = y_0$ est donnée, la forme pratique est

$$y(x) = -\frac{b}{a} + \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)}.$$

Cas $a = 0$. L'équation devient $y' = b$. On revient aux primitives :

$$y(x) = bx + C.$$

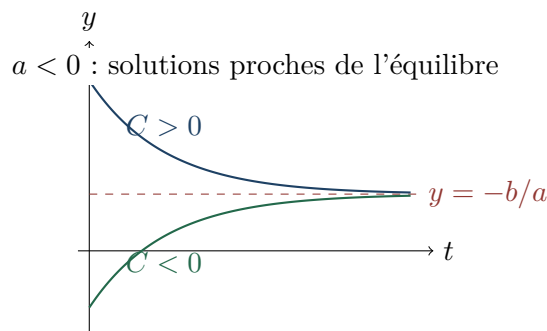


FIGURE 2 – Pour $a < 0$, les solutions de $y' = ay + b$ se rapprochent de la valeur d'équilibre $-b/a$ lorsque t augmente.

Exemple entièrement détaillé

Réolvons

$$y' = 2y - 6, \quad y(0) = 1.$$

Étape 1 – solution constante. Ici $a = 2$ et $b = -6$. La valeur d'équilibre est

$$k = -\frac{-6}{2} = 3.$$

Étape 2 – solution générale.

$$y(x) = 3 + Ce^{2x}.$$

Étape 3 – condition initiale.

$$\begin{aligned} y(0) &= 3 + C = 1, \\ C &= -2. \end{aligned}$$

Conclusion.

$$y(x) = 3 - 2e^{2x}.$$

Le contrôle donne

$$y'(x) = -4e^{2x}, \quad 2y(x) - 6 = 2(3 - 2e^{2x}) - 6 = -4e^{2x}.$$

La condition $y(0) = 1$ est également vérifiée.

3.5 Lorsqu'une solution particulière est donnée

Le programme peut fournir une solution particulière y_p de

$$y' = ay + f(x).$$

Si y est une autre solution, alors

$$(y - y_p)' = y' - y_p' = (ay + f(x)) - (ay_p + f(x)) = a(y - y_p).$$

La différence $y - y_p$ est donc une solution de $z' = az$. Toutes les solutions sont

$$y(x) = y_p(x) + Ce^{ax}.$$

Cette technique est la même idée que pour $y' = ay + b$, où la solution particulière est constante.

Exemple entièrement détaillé

On sait que $y_p(x) = x + 1$ est une solution de

$$y' = 2y - 2x - 1.$$

Toutes les solutions sont donc

$$y(x) = x + 1 + Ce^{2x}.$$

Si l'on impose $y(0) = 4$, alors $1 + C = 4$, donc $C = 3$ et $y(x) = x + 1 + 3e^{2x}$.

À retenir

Pour $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$, chercher d'abord la constante $k = -b/a$, puis ajouter la solution générale de $z' = az$: $y = k + Ce^{ax}$. Une condition initiale détermine ensuite C . Enfin, toujours dériver la réponse et la remplacer dans l'équation.

4 3. Modéliser et approcher une évolution

4.1 Exemple : refroidissement d'un liquide

Une boisson est à 80°C au moment $t = 0$. La pièce est à 20°C . On modélise sa température $T(t)$, en degrés Celsius, à l'instant t exprimé en minutes par

$$T'(t) = -0,2(T(t) - 20).$$

En développant :

$$T'(t) = -0,2T(t) + 4.$$

On reconnaît $a = -0,2$, $b = 4$, et la condition $T(0) = 80$.

La température d'équilibre est

$$T_e = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{-0,2} = 20^\circ\text{C}.$$

La solution générale est donc

$$T(t) = 20 + Ce^{-0,2t}.$$

La condition initiale donne $80 = 20 + C$, donc $C = 60$. Finalement,

$$T(t) = 20 + 60e^{-0,2t} \quad (t \text{ en minutes}).$$

Cette formule a un sens physique : $T(t) > 20$, la température diminue, et elle se rapproche de la température de la pièce sans l'atteindre en un temps fini dans ce modèle. Le coefficient $-0,2$ s'exprime en min^{-1} , afin que T' soit en degrés Celsius par minute.

4.2 La méthode d'Euler

Une formule exacte n'est pas toujours disponible. La méthode d'Euler permet d'obtenir une approximation en avançant par petits pas.

Pour une équation

$$y' = g(t, y),$$

on choisit un pas $h > 0$, un point initial (t_0, y_0) , puis on calcule

$$t_{n+1} = t_n + h, \quad y_{n+1} = y_n + h g(t_n, y_n).$$

L'idée est de remplacer localement la courbe par sa tangente : sa pente au point (t_n, y_n) vaut $g(t_n, y_n)$.

Exemple entièrement détaillé

Appliquons deux pas d'Euler de longueur $h = 1$ à l'équation de refroidissement $T' = -0,2(T - 20)$, avec $T_0 = 80$.

Premier pas.

$$T_1 = T_0 + 1 \times [-0,2(80 - 20)] = 80 - 12 = 68.$$

Deuxième pas.

$$T_2 = T_1 + 1 \times [-0,2(68 - 20)] = 68 - 9,6 = 58,4.$$

Après deux minutes, Euler donne donc $T(2) \approx 58,4^\circ\text{C}$. La formule exacte donne $T(2) = 20 + 60e^{-0,4} \approx 60,2^\circ\text{C}$. L'écart vient du pas assez grand ; diminuer h améliore généralement l'approximation, au prix de davantage de calculs.

Méthode

Pour un exercice de modélisation :

1. définir la fonction et préciser les unités ;
2. traduire l'évolution en une équation différentielle ;
3. identifier a , b et la condition initiale ;
4. résoudre avec la méthode adaptée ;
5. interpréter le résultat dans le contexte et vérifier les unités.

5 4. Exercices gradués

Conseil. Pour chaque exercice, écris d'abord la compétence travaillée et les informations utiles. Si tu bloques, utilise l'indice, puis reprends au moins la première étape seule. Les corrections détaillées sont dans le fascicule séparé, avec la même numérotation.

5.1 Primitives directes

Exercice 1 – Lire le tableau des primitives

Compétence travaillée : utiliser directement les primitives de référence.

Pour chaque fonction, donner une primitive sur le domaine indiqué.

a) $f(x) = 4x^3 - 5x + 7$ sur $\mathbb{R}$;

b) $g(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$;

c) $h(x) = e^x - 2 \cos x$ sur $\mathbb{R}$;

d) $k(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$.

Indice.

Traite les termes séparément. Pour le terme $-2 \cos x$, cherche une fonction dont la dérivée vaut $-2 \cos x$. N'oublie pas la constante C .

Exercice 2 – Reconnaître la dérivée intérieure

Compétence travaillée : reconnaître une primitive par composition.

Donner une primitive de chaque fonction, sur tout intervalle où elle est définie.

a) $f(x) = 6x(3x^2 + 2)^4$;

b) $g(x) = 2e^{2x-1}$;

c) $h(x) = \frac{3}{3x+1}$;

d) $k(x) = \frac{4x}{2x^2+5}$.

Indice.

Dans chaque cas, entoure la partie intérieure : $3x^2 + 2$, $2x - 1$, $3x + 1$ ou $2x^2 + 5$.
Compare sa dérivée avec le facteur placé devant.

5.2 Condition initiale et vérification

Exercice 3 – Une primitive fixée par sa valeur

Compétence travaillée : déterminer une constante avec une condition initiale et contrôler le résultat.

Déterminer la fonction F telle que

$$F'(x) = 12x^2 - 4x + 3e^x \quad \text{et} \quad F(0) = 5.$$

Vérifier les deux conditions obtenues.

Indice.

Commence par la famille générale de primitives. La valeur $F(0) = 5$ donne ensuite une équation très simple en C .

Exercice 4 – Équation homogène

Compétence travaillée : vérifier et résoudre une équation de la forme $y' = ay$.

- a) Vérifier que $u(x) = -3e^{0,5x}$ est solution de $y' = 0,5y$.
- b) Déterminer toutes les solutions de $y' = -4y$.
- c) Déterminer la solution de cette équation qui vérifie $y(0) = 7$.

Indice.

Toutes les solutions de $y' = ay$ ont la forme Ce^{ax} . Pour la question a), calcule séparément u' et $0,5u$. Pour la question c), la condition initiale fixe C .

5.3 Équation affine et solution particulière

Exercice 5 – Équation $y' = ay + b$

Compétence travaillée : trouver la solution constante puis la solution générale d'une équation affine.

Résoudre le problème

$$y' = 3y + 12, \quad y(0) = -1.$$

On demande de faire apparaître la solution constante particulière avant la solution générale.

Indice.

Pose $y_p(x) = k$. L'équation $0 = 3k + 12$ donne la valeur d'équilibre. Ajoute ensuite une expression Ce^{3x} , puis utilise $y(0) = -1$.

Exercice 6 – Une solution particulière est donnée

Compétence travaillée : utiliser une solution particulière pour obtenir toutes les solutions.

On sait que $y_p(x) = x + 1$ est une solution de

$$y' = 2y - 2x - 1.$$

- a) Déterminer toutes les solutions de cette équation.
- b) Déterminer celle qui vérifie $y(0) = 4$.

Indice.

La différence entre une solution quelconque et y_p vérifie une équation de la forme $z' = 2z$. Cherche donc $y - y_p = Ce^{2x}$.

5.4 Problème proche du bac : modélisation

Exercice 7 – Refroidissement d'une boisson

Compétence travaillée : modéliser, résoudre et interpréter une équation différentielle dans un contexte.

La température $T(t)$, en degrés Celsius, d'une boisson placée dans une pièce à 20°C vérifie, pour t en minutes,

$$T'(t) = -0,2(T(t) - 20), \quad T(0) = 80.$$

- Mettre l'équation sous la forme $T' = aT + b$ et déterminer la température d'équilibre.
- Donner l'expression exacte de $T(t)$.
- Calculer une valeur approchée de $T(5)$, au dixième de degré près.
- À partir de quel instant la température est-elle inférieure ou égale à 30°C ? Donner une valeur approchée en minutes.

Indice.

Pour d), remplace $T(t)$ par la formule trouvée et résous $20 + 60e^{-0,2t} \leq 30$. Le logarithme intervient après avoir isolé $e^{-0,2t}$. N'oublie pas que multiplier ou diviser une inégalité par un nombre négatif inverse son sens.

Exercice 8 – Deux pas de méthode d'Euler

Compétence travaillée : appliquer une récurrence d'Euler et comparer une approximation avec une solution exacte.

On considère

$$y' = y - 2, \quad y(0) = 5.$$

Avec un pas $h = 0,5$, calculer les deux premières approximations y_1 et y_2 de la méthode d'Euler. Comparer ensuite avec la solution exacte et expliquer pourquoi les deux valeurs ne coïncident pas exactement.

Indice.

Utilise $y_{n+1} = y_n + h(y_n - 2)$. Pour comparer, résous d'abord l'équation exacte sous la forme $y = 2 + Ce^t$, puis utilise la condition initiale.

6 Bilan, erreurs fréquentes et rappel différé

6.1 Carte mentale à relire

- F est une primitive de f si et seulement si $F' = f$.
- Les primitives de f sur un intervalle sont $F + C$.
- Pour une composition, repérer u et vérifier la présence de u' .
- Les solutions de $y' = ay$ sont Ce^{ax} .
- Si $a \neq 0$, les solutions de $y' = ay + b$ sont $-b/a + Ce^{ax}$. Si $a = 0$, elles sont $bx + C$.
- Une condition initiale détermine la constante C , puis une phrase d'interprétation donne du sens au résultat.
- Euler utilise la pente connue : $y_{n+1} = y_n + h g(t_n, y_n)$.

6.2 Erreurs fréquentes à distinguer

Type de difficulté	Ce qu'il faut vérifier
Erreur de calcul	Le signe, le coefficient et la dérivée de l'expression écrite. Par exemple, $(-\cos x)' = \sin x$.
Erreur de méthode	A-t-on ajouté C ? A-t-on trouvé la solution particulière constante avant d'utiliser Ce^{ax} ?
Incompréhension	Quelle est la fonction inconnue? Que signifie sa dérivée dans le contexte? Sur quel intervalle travaille-t-on?

6.3 Rappel différé

Ces questions sont à refaire deux ou trois jours plus tard, sans relire la correction. Elles servent à vérifier que la méthode est devenue disponible.

Exercice R1 – Primitive courte

Compétence travaillée : réactiver plusieurs primitives de référence.

Donner toutes les primitives, sur $]0, +\infty[$, de

$$f(x) = 4x^3 - \frac{2}{x} + \cos x.$$

Exercice R2 – Constante de la famille

Compétence travaillée : expliquer le rôle d'une constante par la dérivation.

Expliquer en une ou deux phrases pourquoi $F(x) + 7$ a la même dérivée que $F(x)$, quel que soit F .

Exercice R3 – Équation affine

Compétence travaillée : résoudre une équation affine avec équilibre et condition initiale.

Résoudre

$$y' = -0,5y + 10, \quad y(0) = 12,$$

et identifier la valeur d'équilibre.

Exercice R4 – Réflexe Euler

Compétence travaillée : appliquer une étape de la méthode d'Euler.

Pour $y' = 2 - y$, $y(0) = 0$, avec $h = 0,25$, calculer la première approximation y_1 .

Indice.

R1 : utilise les trois lignes du tableau. R3 : commence par la constante solution. R4 : une seule application de la formule d'Euler suffit.

6.4 Auto-évaluation

Cocher une case après le travail :

- ☐ Je sais expliquer avec mes mots ce qu'est une primitive.
- ☐ Je sais vérifier une primitive en la dérivant.
- ☐ Je sais repérer une composition et sa dérivée intérieure.
- ☐ Je sais résoudre $y' = ay$ et utiliser une condition initiale.
- ☐ Je sais trouver la solution constante de $y' = ay + b$.
- ☐ Je sais interpréter un résultat avec ses unités.

Si une case reste vide, revenir seulement à la section correspondante et refaire l'exercice associé.
Une difficulté localisée est une indication de travail, pas un jugement sur le niveau général.