

Fiche d'histoire mathématique

Remonter la pente et prévoir l'évolution

Des primitives du calcul aux modèles différentiels

Idée directrice. Chercher une primitive revient à inverser la dérivation. Résoudre une équation différentielle revient à chercher une fonction dont on connaît une relation avec sa dérivée. Ces deux problèmes sont nés de questions géométriques et physiques : retrouver une aire, une position à partir d'une vitesse ou une température à partir d'un rythme de variation.

Table des matières

1 Aires, tangentes et opérations inverses	1
2 Le théorème fondamental du calcul	1
3 Des trajectoires aux équations différentielles	1
4 Euler et l'approximation pas à pas	2
5 À retenir	2
6 Pour aller plus loin	2

1 Aires, tangentes et opérations inverses

Avant la notation moderne, les mathématiciens cherchent l'aire sous une courbe et la pente d'une tangente. Au XVII^e siècle, Newton et Leibniz comprennent que ces problèmes sont liés par des opérations inverses. Si $F'(x) = f(x)$, alors F permet de retrouver une accumulation de f .

Leibniz utilise le signe $\int$, une déformation de la lettre S , pour évoquer une somme. La primitive n'est donc pas une formule isolée : elle est la fonction dont les petites variations s'accumulent pour produire une valeur globale.

2 Le théorème fondamental du calcul

Le lien entre dérivée et intégrale est souvent appelé théorème fondamental du calcul. Dans une situation simple,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{si } F' = f.$$

Cette formule transforme un problème d'aire ou de distance en deux évaluations et une soustraction. Elle explique aussi pourquoi toutes les primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante : la dérivée d'une constante est nulle.

3 Des trajectoires aux équations différentielles

En mécanique, connaître la vitesse $v(t)$ et la position initiale permet de retrouver la position $s(t)$ par $s'(t) = v(t)$. Plus généralement, une loi physique donne souvent une relation entre une grandeur et sa variation.

Les frères Bernoulli, Euler, d'Alembert et Lagrange développent au XVIII^e siècle les méthodes des équations différentielles. Pour $y' = ay$, la solution exponentielle apparaît ; pour $y' = ay + b$, on retrouve une valeur d'équilibre plus un terme exponentiel.

La constante C n'est pas un détail de calcul. Une équation différentielle décrit une famille de trajectoires ; une condition initiale sélectionne celle qui correspond au phénomène observé.

4 Euler et l'approximation pas à pas

Une équation différentielle n'a pas toujours une solution que l'on peut écrire avec des fonctions usuelles. Leonhard Euler propose au XVIII^e siècle une méthode numérique élémentaire : sur un petit intervalle, on remplace la courbe par sa tangente.

Si $y' = g(t, y)$, alors, avec un pas h ,

$$y_{n+1} = y_n + h g(t_n, y_n).$$

La méthode n'est pas exacte : elle fabrique une suite d'approximations. Elle annonce les méthodes numériques utilisées aujourd'hui pour simuler le climat, les trajectoires, les circuits ou les populations.

Repère	Apport
XVII ^e siècle	Newton et Leibniz relient aires et dérivées.
XVII ^e –XVIII ^e siècles	Le signe intégral et les primitives se stabilisent.
XVIII ^e siècle	Bernoulli, Euler et Lagrange développent les équations différentielles.
Depuis le XVIII ^e siècle	La méthode d'Euler ouvre la voie au calcul numérique.

5 À retenir

Une primitive reconstruit une grandeur à partir de son taux de variation. Une équation différentielle décrit une famille d'évolutions ; une condition initiale choisit la bonne trajectoire. Quand une formule exacte manque, Euler remplace localement la courbe par une tangente et avance par petits pas.

6 Pour aller plus loin

- MacTutor, histoire générale du calcul infinitésimal : The rise of calculus.
- MacTutor, notice historique sur Euler : Leonhard Euler.
- Pour l'histoire de l'intégrale et de la notation $\int$, consulter la fiche d'histoire du calcul intégral.