

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Corrections expliquées

Calcul intégral

À consulter après une première recherche personnelle

Utilisation. Cherche d’abord dans le fascicule du cours. Lis son indice si tu es bloquée, puis compare ta démarche avec la correction complète. Une rédaction différente peut être correcte si elle respecte les données, les conditions et les unités. Les exercices sont des créations pédagogiques ; ils ne sont pas des sujets officiels.

Rappel central. Si $F' = f$, alors $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$. Cette différence est une intégrale signée ; elle ne devient une aire géométrique que lorsque le signe de la fonction a été contrôlé.

Table des matières

1	Diagnostic : réponses et rappels ciblés	3
2	Corrections des exercices 1 à 4	4
3	Corrections des exercices 5 à 8	6
4	Rappel différé : corrections	8

1 Diagnostic : réponses et rappels ciblés

Correction D1

$$\int_0^2 3 \, dx = 3(2 - 0) = 6.$$

La courbe est une droite horizontale de hauteur 3, et la largeur du rectangle vaut 2. L'aire est donc $3 \times 2 = 6$.

Correction D2

$$F'(x) = (x^3 - 2x)' = 3x^2 - 2.$$

Connaître une dérivée permet de reconnaître une primitive à l'envers : si une fonction F a pour dérivée f , alors F sert à calculer $\int f$.

Correction D3

Une primitive de $2x + 1$ est

$$F(x) = x^2 + x,$$

car $F'(x) = 2x + 1$. Toutes les primitives sont $x^2 + x + C$, où C est une constante réelle.

Correction D4

Sur $[0, 1]$, $x + 2$ est positive, donc sa contribution est positive :

$$\int_0^1 (x + 2) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 = \frac{5}{2} > 0.$$

En revanche $x - 2 \leq -1$ sur cet intervalle, donc

$$\int_0^1 (x - 2) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_0^1 = -\frac{3}{2} < 0.$$

Correction D5

L'aire du triangle est

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6 \text{ cm}^2.$$

La hauteur et la base doivent être exprimées dans des unités compatibles avant d'appliquer la formule.

Correction D6

Un débit est une quantité par unité de temps. Ainsi

$$(\text{litres par minute}) \times (\text{minutes}) = \text{litres}.$$

L'intégrale représente donc un volume exprimé en litres.

Point de méthode

Pour le diagnostic, les compétences à reprendre sont distinctes : primitive et dérivée, aire de figures, signe et unités. Il n'est pas nécessaire de tout revoir si un seul point bloque.

2 Corrections des exercices 1 à 4

Correction 1

On cherche d'abord une primitive :

$$F(x) = 2x^2 - 2x, \quad F'(x) = 4x - 2.$$

La relation primitive-intégrale donne

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 (4x - 2) \, dx \\ &= \left[2x^2 - 2x \right]_1^3 \\ &= (2 \times 3^2 - 2 \times 3) - (2 \times 1^2 - 2 \times 1) \\ &= (18 - 6) - (2 - 2) = 12. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{I = 12}$. La fonction vaut 2 en 1 et 10 en 3 : une valeur positive est cohérente avec une aire sous la droite.

Correction 2

Une primitive de $x - 1$ est $F(x) = \frac{x^2}{2} - x$. Donc

$$\begin{aligned} J &= \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^2 \\ &= \left(\frac{4}{2} - 2 \right) - 0 = 0. \end{aligned}$$

Ce résultat n'est pas l'aire géométrique totale, car la fonction change de signe en $x = 1$. Les deux triangles ont chacun une aire $\frac{1}{2}$, donc l'aire géométrique totale vaut 1, tandis que les contributions signées $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$ se compensent.

Correction 3

La relation de Chasles donne

$$\int_0^6 f(x) \, dx = \int_0^2 f(x) \, dx + \int_2^6 f(x) \, dx = 5 + (-1) = 4.$$

En inversant les bornes, le signe change :

$$\int_6^2 f(x) \, dx = - \int_2^6 f(x) \, dx = -(-1) = 1.$$

La valeur $\int_0^6 f = 4$ ne permet pas de supposer que la fonction est positive partout ; elle est seulement la somme des deux contributions.

Correction 4

La largeur de l'intervalle est $5 - 2 = 3$. Comme $1 \leq f(x) \leq 4$, l'intégration de l'inégalité donne

$$1(5 - 2) \leq \int_2^5 f(x) \, dx \leq 4(5 - 2),$$

soit

$$\boxed{3 \leq \int_2^5 f(x) \, dx \leq 12.}$$

La valeur moyenne est

$$m_f = \frac{1}{3} \int_2^5 f(x) \, dx.$$

En divisant l'encadrement par $3 > 0$, on obtient

$$\boxed{1 \leq m_f \leq 4}.$$

3 Corrections des exercices 5 à 8

Correction 5

Le volume écoulé est l'intégrale du débit :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 (2+t) \, dt \\ &= \left[2t + \frac{t^2}{2} \right]_0^3 \\ &= \left(6 + \frac{9}{2} \right) - 0 = \frac{21}{2} = 10,5. \end{aligned}$$

Le résultat est 10,5 L. Le débit moyen est le volume divisé par la durée :

$$q_{\text{moy}} = \frac{10,5 \text{ L}}{3 \text{ min}} = \boxed{3,5 \text{ L/min}}.$$

La valeur est comprise entre le débit initial 2 et le débit final 5.

Correction 6

On compare les deux fonctions grâce à leur différence :

$$f(x) - g(x) = 2x - x^2 = x(2 - x).$$

Pour $0 \leq x \leq 2$, les deux facteurs x et $2 - x$ sont positifs ou nuls. Ainsi f est au-dessus de g sur tout l'intervalle.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (2x - x^2) \, dx \\ &= \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 \\ &= 4 - \frac{8}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}. \end{aligned}$$

On ne calcule pas $\int f + \int g$: l'épaisseur verticale de la zone est bien $f - g$.

Correction 7

On choisit

$$u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \quad v'(x) = \cos x, \quad v(x) = \sin x.$$

La formule d'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} K &= [x \sin x]_0^1 - \int_0^1 \sin x \, dx \\ &= \sin(1) - [-\cos x]_0^1 \\ &= \sin(1) - (-\cos(1) + 1) \\ &= \boxed{\sin(1) + \cos(1) - 1}. \end{aligned}$$

En radians, cette valeur est environ 0,3818, ce qui est positive comme la fonction $x \cos x$ sur $[0, 1]$.

Correction 8

a) La distance est l'intégrale de la vitesse :

$$\begin{aligned}d &= \int_0^4 (3 + t) \, dt \\&= \left[3t + \frac{t^2}{2} \right]_0^4 \\&= 12 + 8 = \boxed{20 \text{ m}}.\end{aligned}$$

b) La durée vaut 4 s, donc la vitesse moyenne est

$$v_{\text{moy}} = \frac{20 \text{ m}}{4 \text{ s}} = \boxed{5 \text{ m/s}}.$$

c) À vitesse constante 5 m/s pendant 4 s, la distance serait $5 \times 4 = 20$ m, exactement la même. C'est la signification de la vitesse moyenne : elle produit la même distance sur la même durée.

Point de méthode

Dans un problème de mouvement, vérifier la chaîne vitesse $\times$ durée = distance. L'intégrale généralise ce produit lorsque la vitesse varie. Une réponse sans unité est incomplète si le contexte en fournit.

4 Rappel différé : corrections

Correction R1

$$\int_0^1 (3x^2 + 2) \, dx = \left[x^3 + 2x \right]_0^1 = 1 + 2 = \boxed{3}.$$

Correction R2

La longueur de l'intervalle vaut 4. Ainsi

$$5 \times 4 \leq \int f \leq 7 \times 4,$$

soit $\boxed{20 \leq \int f \leq 28}.$

Correction R3

Une intégrale est algébrique : la partie située sous l'axe des abscisses contribue négativement. L'aire géométrique, elle, additionne les surfaces avec des valeurs positives.

Correction R4

$$(\text{kilomètres par heure}) \times (\text{heures}) = \boxed{\text{kilomètres}}.$$