

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Calcul intégral

Mesurer une accumulation et une aire avec une intégrale

Un cours progressif avec exemples, exercices et indices

Objectifs

- Interpréter une intégrale comme une aire algébrique et comme une accumulation.
- Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, de la relation de Chasles ou d'une intégration par parties.
- Encadrer ou approximer une intégrale et contrôler les unités du résultat.
- Calculer une valeur moyenne et une aire entre deux courbes.

Cadre du cours. Ce fascicule vise une élève préparant vraisemblablement la session 2027 du baccalauréat général avec l'enseignement de spécialité mathématiques. Le programme de référence est celui du Bulletin officiel spécial n° 8 du 25 juillet 2019. Un nouveau programme a été publié le 2 avril 2026 et s'appliquera en terminale à partir de la rentrée 2027–2028. Les exercices de ce fascicule sont créés pour l'apprentissage : ils ne sont pas des sujets officiels.

Organisation conseillée. Prévoir cinq séances de 35 à 45 minutes, avec une pause de 5 minutes si nécessaire :

1. diagnostic, aire et notation de l'intégrale ;
2. lien entre intégrale et primitive ;
3. propriétés, encadrements et valeur moyenne ;
4. intégration par parties et aire entre deux courbes ;
5. exercices de synthèse et rappel différé.

Une séance courte et réussie vaut mieux qu'une lecture rapide de tout le chapitre. Les corrections détaillées sont dans le fascicule séparé.

Table des matières

1	Avant de commencer : diagnostic et rappels	3
2	1. L'idée : une aire et une accumulation	4
3	2. Calculer avec une primitive	5
4	3. Propriétés, signe et valeur moyenne	7
5	4. Intégration par parties et aires entre deux courbes	8
6	5. Exercices gradués	10
7	Bilan, erreurs fréquentes et rappel différé	12

1 Avant de commencer : diagnostic et rappels

Durée : 12 minutes, sans note et sans calculatrice. Ce diagnostic porte seulement sur les prérequis utiles. Écrire « à revoir » est une réponse utile : elle indique par où reprendre.

D1. Calculer $\int_0^2 3 \, dx$ en reconnaissant l'aire d'un rectangle.

D2. Dériver $F(x) = x^3 - 2x$. Pourquoi cette dérivée est-elle utile pour calculer une intégrale ?

D3. Donner une primitive de $f(x) = 2x + 1$.

D4. Comparer les signes de $\int_0^1 (x + 2) \, dx$ et de $\int_0^1 (x - 2) \, dx$.

D5. Calculer l'aire d'un triangle de base 4 cm et de hauteur 3 cm.

D6. Dans une situation où $f(t)$ est un débit en litres par minute, quelles sont les unités de $\int_a^b f(t) \, dt$?

1.1 Les rappels indispensables

Primitive. Une fonction F est une primitive de f sur un intervalle si $F'(x) = f(x)$ pour tout x de cet intervalle. Par exemple, x^2 est une primitive de $2x$.

Aire de figures usuelles. Un rectangle a pour aire longueur $\times$ largeur, et un triangle a pour aire $\frac{1}{2} \times$ base $\times$ hauteur. Une intégrale généralisera cette idée lorsque le bord supérieur est une courbe.

Unités. Multiplier une hauteur en litres par minute par une durée en minutes donne des litres. L'intégrale garde donc une unité : elle ne donne pas toujours un nombre « sans unité ».

À retenir

Avant une intégrale, repérer l'intervalle $[a, b]$, la fonction intégrée, son signe et ses unités. Si une primitive F est connue, le calcul exact se fait par $F(b) - F(a)$.

2 1. L'idée : une aire et une accumulation

2.1 Comprendre avant de calculer

Si f est positive sur $[a, b]$, la quantité $\int_a^b f(x) dx$ représente l'aire située entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$. L'unité est celle d'une largeur multipliée par celle d'une hauteur.

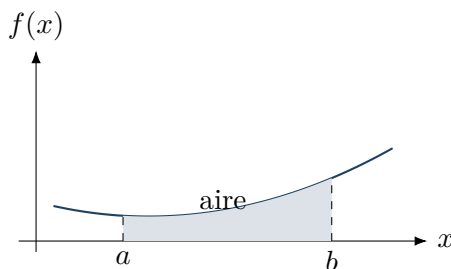


FIGURE 1 – Pour une fonction positive, l'intégrale est l'aire sous la courbe.

2.2 De rectangles à l'intégrale

Sur un petit intervalle de largeur Δx , la quantité $f(x_i)\Delta x$ est l'aire d'un rectangle qui approche l'aire sous la courbe. En additionnant les rectangles, on obtient une somme :

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i.$$

Lorsque les rectangles deviennent très fins, cette somme se rapproche de $\int_a^b f(x) dx$. Cette vision explique le lien entre le discret (une somme) et le continu (une intégrale), sans exiger de construire une limite formelle dans ce cours.

Exemple entièrement détaillé

Pour $f(x) = x^2$ sur $[0, 1]$, partageons l'intervalle en quatre bandes de largeur $\Delta x = \frac{1}{4}$. Les rectangles à gauche donnent

$$\begin{aligned} S_{\text{gauche}} &= \frac{1}{4} \left(0^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{9}{16} \right) = \frac{7}{32} \approx 0,21875. \end{aligned}$$

Les rectangles à droite donnent

$$S_{\text{droite}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{9}{16} + 1 \right) = \frac{15}{32} \approx 0,46875.$$

Comme x^2 est croissante, la vraie aire est comprise entre ces deux valeurs. Le calcul exact, vu plus loin, donnera $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$, ce qui est bien dans l'encadrement.

À retenir

Une somme de rectangles permet d'estimer une intégrale. Pour une fonction croissante, les rectangles à gauche sous-estiment l'aire et ceux à droite la surestiment. Une approximation doit être accompagnée de son unité et, si possible, d'un encadrement.

3 2. Calculer avec une primitive

3.1 Le théorème fondamental

Pour une fonction continue f sur un intervalle, on admet qu'elle possède une primitive. Si $F' = f$, alors

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

La primitive n'est pas unique, car $F + C$ a la même dérivée que F , mais la différence $(F(b) + C) - (F(a) + C)$ ne dépend pas de C .

3.2 Primitives de référence

Fonction	Une primitive
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$ sur un intervalle ne contenant pas 0	$\ln(x)$
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$u'(x) u(x)^n$	$\frac{u(x)^{n+1}}{n+1}$
$u'(x) e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$

Les constantes multiplicatives se sortent de l'intégrale : $\int_a^b \lambda f(x) \, dx = \lambda \int_a^b f(x) \, dx$.

Exemple entièrement détaillé

Calculons $I = \int_0^2 (2x + 1) \, dx$.

1. Une primitive de $2x + 1$ est $F(x) = x^2 + x$, car $F'(x) = 2x + 1$.
2. On applique la relation primitive-intégrale :

$$I = \left[x^2 + x \right]_0^2.$$

3. On calcule séparément les deux valeurs :

$$F(2) = 2^2 + 2 = 6, \quad F(0) = 0^2 + 0 = 0.$$

4. On soustrait :

$$I = F(2) - F(0) = 6 - 0 = 6.$$

Si f représente une hauteur en mètres et x une longueur en mètres, le résultat est 6 m^2 .
Le nombre 6 est positif, ce qui correspond à une aire sous une courbe positive.

3.3 Fonction définie par une intégrale

Si f est continue, la fonction

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

est une primitive de f et vérifie $F_a(a) = 0$. La lettre t est une variable intermédiaire : elle évite de confondre la borne variable x et la variable utilisée sous l'intégrale.

4 3. Propriétés, signe et valeur moyenne

4.1 Propriétés à connaître

Pour des fonctions intégrables et des nombres adaptés :

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)(x) \, dx &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx, \\ \int_a^b \lambda f(x) \, dx &= \lambda \int_a^b f(x) \, dx, \\ \int_a^a f(x) \, dx &= 0, \\ \int_a^b f(x) \, dx &= - \int_b^a f(x) \, dx.\end{aligned}$$

La relation de Chasles permet de découper un intervalle :

$$\boxed{\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx.}$$

Si $f(x) \geq 0$, alors son intégrale est positive. Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

En particulier, si $m \leq f(x) \leq M$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a).$$

Exemple entièrement détaillé

Sur $[1, 3]$, on sait que $2 \leq f(x) \leq 5$. Sans connaître une primitive de f , on peut encadrer son intégrale :

$$2(3-1) \leq \int_1^3 f(x) \, dx \leq 5(3-1),$$

donc

$$\boxed{4 \leq \int_1^3 f(x) \, dx \leq 10.}$$

Les bornes sont des aires de rectangles. Elles ont les mêmes unités que l'intégrale.

4.2 Valeur moyenne

La valeur moyenne de f sur $[a, b]$, avec $a < b$, est

$$\boxed{m_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.}$$

Elle représente la hauteur constante d'un rectangle qui aurait la même aire que la surface sous la courbe. Si $m \leq f \leq M$, alors $m \leq m_f \leq M$.

Exemple entièrement détaillé

Pour $f(x) = 2x + 1$ sur $[0, 2]$, l'intégrale vaut 6, calculée plus haut. La longueur de l'intervalle vaut 2. Donc

$$m_f = \frac{6}{2} = 3.$$

La fonction varie de 1 à 5, et sa valeur moyenne 3 est bien entre ces deux valeurs.

5 4. Intégration par parties et aires entre deux courbes

5.1 Intégration par parties

Si u et v sont dérivables et si les intégrales existent :

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.$$

On choisit souvent u comme une fonction qui se simplifie en dérivant, et v' comme une fonction dont une primitive est immédiate.

Exemple entièrement détaillé

Calculons $I = \int_0^1 xe^x \, dx$.

1. On choisit $u(x) = x$, donc $u'(x) = 1$, et $v'(x) = e^x$, donc $v(x) = e^x$.
2. La formule donne

$$I = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x \, dx.$$

3. Le terme de bord vaut

$$[xe^x]_0^1 = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 = e.$$

4. La dernière intégrale vaut

$$\int_0^1 e^x \, dx = [e^x]_0^1 = e - 1.$$

5. Ainsi

$$I = e - (e - 1) = 1.$$

Une vérification graphique est possible : sur $[0, 1]$, xe^x est positive et sa courbe reste à une hauteur modérée ; une aire égale à 1 est plausible.

5.2 Aire entre deux courbes

Si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a, b]$, l'aire entre leurs courbes vaut

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx.$$

Il faut donc commencer par comparer les courbes. Si elles se croisent, on détermine les abscisses d'intersection et on découpe l'intervalle.

Exemple entièrement détaillé

Sur $[0, 1]$, la droite $f(x) = x$ est au-dessus de $g(x) = x^2$, car $x - x^2 = x(1 - x) \geq 0$.
L'aire cherchée est

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (x - x^2) \, dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

À retenir

Pour une aire entre deux courbes, intégrer courbe du dessus – courbe du dessous. Pour une intégrale calculée par primitive, écrire explicitement $F(b) - F(a)$. Pour une intégration par parties, annoncer u , u' , v' et v avant d'appliquer la formule.

6 5. Exercices gradués

Consigne générale. Cherche d'abord sans consulter la correction. Chaque exercice indique la compétence travaillée. Les indices donnent une direction, pas le résultat complet. Les corrections sont dans le fascicule séparé et reprennent exactement les numéros.

Exercice 1 – Calcul direct

Compétence : utiliser une primitive de référence. Calculer $I = \int_1^3 (4x - 2) \, dx$.

Indice.

Cherche une primitive de $4x - 2$, puis calcule sa valeur en 3 et en 1.

Exercice 2 – Lecture du signe

Compétence : interpréter le signe d'une intégrale. Calculer $J = \int_0^2 (x - 1) \, dx$. Le résultat est-il une aire géométrique sous la courbe ?

Indice.

La courbe coupe l'axe en $x = 1$. Utilise soit une primitive, soit deux triangles de part et d'autre de l'axe.

Exercice 3 – Chasles et contrôle

Compétence : découper une intégrale. On sait que $\int_0^2 f(x) \, dx = 5$ et $\int_2^6 f(x) \, dx = -1$. Calculer $\int_0^6 f(x) \, dx$, puis $\int_6^2 f(x) \, dx$.

Indice.

Applique Chasles dans le sens 0 vers 6, puis change l'ordre des bornes.

Exercice 4 – Encadrement

Compétence : intégrer une inégalité. Sur $[2, 5]$, une fonction f vérifie $1 \leq f(x) \leq 4$. Encadrer $\int_2^5 f(x) \, dx$. Que peut-on dire de sa valeur moyenne ?

Indice.

Multiplie les bornes 1 et 4 par la largeur $5 - 2$, puis divise l'encadrement par cette largeur pour la valeur moyenne.

Exercice 5 – Valeur moyenne et unités

Compétence : calculer et interpréter une valeur moyenne. Un débit $q(t) = 2 + t$ est exprimé en litres par minute pendant les 3 premières minutes. Calculer le volume total écoulé et le débit moyen.

Indice.

Le volume est $\int_0^3 q(t) \, dt$. Le débit moyen est ce volume divisé par 3 minutes.

Exercice 6 – Aire entre deux courbes

Compétence : traduire une aire par une différence de fonctions. Sur $[0, 2]$, comparer $f(x) = 2x$ et $g(x) = x^2$, puis calculer l'aire comprise entre leurs courbes.

Indice.

Étudie le signe de $2x - x^2 = x(2 - x)$ avant d'intégrer.

Exercice 7 – Intégration par parties

Compétence : choisir et appliquer une intégration par parties. Calculer $K = \int_0^1 x \cos x \, dx$.

Indice.

Prends $u(x) = x$ et $v'(x) = \cos x$, donc $v(x) = \sin x$.

Exercice 8 – Problème de synthèse

Compétence : modéliser une accumulation et contrôler le résultat. La vitesse d'un cycliste est modélisée, pour $0 \leq t \leq 4$, par $v(t) = 3 + t$ en mètres par seconde.

- a) Calculer la distance parcourue pendant les quatre secondes.
- b) Calculer la vitesse moyenne sur cet intervalle.
- c) Comparer avec la distance obtenue si le cycliste roulait toujours à la vitesse moyenne.

Indice.

Une vitesse s'accumule en distance par $\int_0^4 v(t) \, dt$. La vitesse moyenne est la distance divisée par la durée.

7 Bilan, erreurs fréquentes et rappel différé

7.1 Erreurs fréquentes

- Écrire $F(b) + F(a)$ au lieu de $F(b) - F(a)$.
- Oublier de vérifier le signe de la fonction avant d'appeler l'intégrale une aire géométrique.
- Intégrer la mauvaise différence entre deux courbes.
- Diviser par $b - a$ alors que l'on cherche l'intégrale, ou oublier cette division lorsqu'on cherche la valeur moyenne.
- Perdre les unités : un débit intégré sur une durée donne un volume.
- Appliquer l'intégration par parties sans préciser le choix de u et v' .

7.2 Auto-évaluation

Cocher une phrase après la séance :

- ☐ Je sais expliquer ce que mesure $\int_a^b f(x) dx$ lorsque $f \geq 0$.
- ☐ Je sais calculer une intégrale avec une primitive et vérifier son signe.
- ☐ Je sais encadrer une intégrale à partir d'un encadrement de la fonction.
- ☐ Je sais distinguer intégrale, aire et valeur moyenne.
- ☐ Je sais décider quand une intégration par parties ou un découpage est utile.

7.3 Rappel différé

R1. Sans calculatrice, calculer $\int_0^1 (3x^2 + 2) dx$.

R2. Une fonction est comprise entre 5 et 7 sur un intervalle de longueur 4. Donner un encadrement de son intégrale.

R3. Expliquer en une phrase pourquoi une intégrale peut être négative alors qu'une aire géométrique est positive.

R4. Pour une vitesse en kilomètres par heure intégrée sur une durée en heures, quelle est l'unité du résultat ?

En cas de blocage. Reprendre dans cet ordre : primitive, bornes, signe, unités, puis calcul. Une solution partielle qui identifie la primitive ou la fonction du dessus est déjà une étape exploitable.