

Fiche d'histoire mathématique

Additionner une infinité de petites contributions

Des aires d'Archimède à l'intégrale de Riemann

Idée directrice. Une intégrale mesure une accumulation : aire, distance, volume, quantité de chaleur ou coût total. Son histoire est celle d'une question difficile : comment additionner une multitude de petites contributions sans faire semblant qu'elles sont en nombre fini ?

Table des matières

1	Archimède et la méthode d'épuisement	1
2	Cavalieri, Kepler et les indivisibles	1
3	Newton, Leibniz et la notation intégrale	1
4	Cauchy et Riemann : rendre la somme rigoureuse	2
5	Accumuler dans les sciences	2
6	À retenir	2
7	Pour aller plus loin	2

1 Archimède et la méthode d'épuisement

Au III^e siècle avant notre ère, Archimède calcule des aires et des volumes avec la méthode d'épuisement. Pour approcher l'aire d'un cercle, il l'encadre par des polygones dont le nombre de côtés augmente. Pour un segment de parabole, il construit une suite de triangles dont les aires forment une progression géométrique.

L'idée est déjà celle de l'intégrale définie : les approximations deviennent de plus en plus précises et l'erreur peut être rendue aussi petite que l'on veut. Archimède obtient ainsi des résultats qui ressemblent à ceux du calcul intégral, sans disposer de la notation moderne.

2 Cavalieri, Kepler et les indivisibles

À la Renaissance et au début du XVII^e siècle, les problèmes de volumes et d'aires reviennent avec l'astronomie et la mécanique. Johannes Kepler additionne des éléments d'aires pour étudier les orbites. Bonaventura Cavalieri imagine une figure comme une collection de lignes indivisibles et développe une méthode de calcul des aires et des volumes.

Ces méthodes sont efficaces mais leur langage est difficile à justifier. Elles préparent la distinction moderne entre une somme finie de rectangles et la limite de ces sommes lorsque leur largeur diminue.

3 Newton, Leibniz et la notation intégrale

Au XVII^e siècle, Newton relie la vitesse et la distance : intégrer une vitesse permet de retrouver une distance. Leibniz considère l'intégrale comme une somme et introduit le symbole $\int$, issu d'une lettre S allongée.

Le théorème fondamental du calcul établit que dérivation et intégration sont des opérations inverses dans les conditions appropriées. C'est une révolution pratique : une aire compliquée peut être calculée en trouvant une primitive.

4 Cauchy et Riemann : rendre la somme rigoureuse

Au XIX^e siècle, Cauchy précise la notion de somme et de limite. Bernhard Riemann formalise ensuite l'intégrale à l'aide de sommes de rectangles : on découpe l'intervalle, on choisit une hauteur dans chaque petit intervalle et on étudie la limite des sommes obtenues.

Cette construction explique pourquoi une intégrale peut être une aire signée. Les rectangles situés sous l'axe comptent négativement. Pour obtenir une aire géométrique, il faut étudier le signe et, si nécessaire, intégrer la valeur absolue ou découper l'intervalle.

5 Accumuler dans les sciences

Le langage intégral s'est étendu bien au-delà des figures. Une vitesse intégrée sur le temps donne une distance ; un débit intégré donne un volume ; une densité intégrée donne une masse ; une fonction de coût intégrée donne un coût total.

La valeur moyenne

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$$

résume une accumulation par une hauteur constante. Elle n'est donc pas l'intégrale elle-même : elle correspond à l'aire totale répartie sur la largeur $b - a$.

Repère	Apport
III ^e siècle av. J.-C.	Archimède encadre aires et volumes par épuisement.
XVII ^e siècle	Kepler et Cavalieri développent des méthodes d'indivisibles.
1660–1680	Newton et Leibniz relient aire, somme et dérivée.
XIX ^e siècle	Cauchy et Riemann donnent un cadre rigoureux aux limites de sommes.

6 À retenir

L'intégrale est une somme limite. Les primitives offrent une méthode de calcul, mais le sens géométrique et les unités restent essentiels : une intégrale accumule une grandeur sur un intervalle et le signe doit être interprété.

7 Pour aller plus loin

- MacTutor, histoire du calcul intégral et de la méthode d'épuisement : The rise of calculus.
- MacTutor, histoire d'Archimède et de ses méthodes d'aire : Archimedes and numerical analysis.
- Pour le lien entre primitive et intégrale, consulter la fiche d'histoire des primitives.