

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Corrections expliquées

Succession d'épreuves indépendantes, schéma de Bernoulli

À consulter après une première recherche personnelle

Utilisation. Cherche d'abord dans le fascicule du cours. Lis son indice si tu es bloquée, puis compare ta démarche avec la correction complète. Les exercices sont des créations pédagogiques ; ils ne sont pas des sujets officiels du baccalauréat.

Rappel central. Dans un arbre, on multiplie les probabilités d'un chemin et on additionne les chemins disjoints qui répondent à la question. Une loi binomiale ne s'utilise qu'après avoir identifié n , p et l'indépendance.

Table des matières

1	Diagnostic : réponses et rappels ciblés	3
2	Corrections des exercices 1 à 4	4
3	Corrections des exercices 5 à 8	5
4	Rappel différé : corrections	7

1 Diagnostic : réponses et rappels ciblés

Correction D1

L'événement contraire de A est $\overline{A}$, donc

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - 0,3 = \boxed{0,7}.$$

$\overline{A}$ signifie que A ne se réalise pas.

Correction D2

Les épreuves sont indépendantes, donc on multiplie les probabilités des deux succès :

$$\mathbb{P}(\text{deux succès}) = 0,8 \times 0,7 = \boxed{0,56}.$$

Correction D3

Les issues sont les couples

$$(P, P), \quad (P, F), \quad (F, P), \quad (F, F).$$

Le premier symbole décrit le premier lancer et le second le deuxième lancer.

Correction D4

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = \boxed{10}.$$

Ce nombre compte les choix de deux positions parmi cinq, sans distinguer l'ordre des positions choisies.

Correction D5

Dans cinq essais indépendants, $0,9^4 \times 0,1$ est la probabilité d'un chemin précis comportant quatre succès de probabilité 0,9 et un échec de probabilité 0,1. Cela ne compte pas les différents ordres possibles. Pour « exactement quatre succès », il faudrait multiplier encore par $\binom{5}{4} = 5$.

Correction D6

Le contraire d'« au moins un succès » est « aucun succès ». Un échec a probabilité 0,8, donc

$$\mathbb{P}(\text{au moins un succès}) = 1 - (0,8)^5 = 1 - 0,32768 = \boxed{0,67232}.$$

Point de méthode

Une réponse de probabilité doit rester entre 0 et 1. Vérifier le nombre d'essais avant de donner un sens à un produit de puissances. Le coefficient binomial apparaît dès que plusieurs ordres réalisent le même nombre de succès.

2 Corrections des exercices 1 à 4

Correction 1

Un tir échoue avec probabilité $1 - 0,7 = 0,3$. Le contraire de « réussir au moins un tir » est « échouer les deux tirs ». L'indépendance donne

$$\mathbb{P}(\text{aucun succès}) = 0,3^2 = 0,09.$$

Donc

$$\mathbb{P}(\text{au moins un succès}) = 1 - 0,09 = \boxed{0,91}.$$

Correction 2

Notons C_A et C_B les conformités.

Deux pièces conformes.

$$\mathbb{P}(C_A \cap C_B) = 0,9 \times 0,8 = \boxed{0,72}.$$

Une seule pièce conforme. Les deux chemins disjoints sont $(C_A, \overline{C}_B)$ et $(\overline{C}_A, C_B)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{une seule}) &= 0,9 \times 0,2 + 0,1 \times 0,8 \\ &= 0,18 + 0,08 = \boxed{0,26}.\end{aligned}$$

Correction 3

a) Il y a $n = 5$ lancers. La probabilité d'obtenir un six est $p = \frac{1}{6}$, car un dé équilibré possède six faces.

b) X est le nombre de six obtenus lors des cinq lancers.

c) Chaque lancer a deux catégories utiles, « six » ou « pas six », la probabilité p est constante et les lancers sont indépendants. Donc

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}\left(5, \frac{1}{6}\right)}.$$

Correction 4

Dans $\mathcal{B}(6, 0,3)$, la formule donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 2) &= \binom{6}{2} (0,3)^2 (0,7)^4 \\ &= 15 \times 0,09 \times 0,2401 \\ &= \boxed{0,324135}.\end{aligned}$$

Le facteur 15 compte les positions possibles des deux succès.

3 Corrections des exercices 5 à 8

Correction 5

Pour $X \sim \mathcal{B}(5, 0,4)$, le complément d'un seul succès ou moins est « au moins deux succès ».

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq 1) &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) \\ &= (0,6)^5 + \binom{5}{1}(0,4)(0,6)^4 \\ &= 0,07776 + 0,2592 \\ &= \boxed{0,33696}.\end{aligned}$$

Par complément :

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - 0,33696 = 0,66304}.$$

Correction 6

On calcule les probabilités cumulées autour du seuil :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 8) &= \binom{10}{8}(0,6)^8(0,4)^2 + \binom{10}{9}(0,6)^9(0,4) + (0,6)^{10} \\ &\approx 0,1673 \leq 0,2.\end{aligned}$$

Pour le rang précédent,

$$\mathbb{P}(X \geq 7) \approx 0,3823 > 0,2.$$

Le premier rang qui convient est donc

$$\boxed{k = 8}.$$

Tester $k = 7$ est indispensable : cela justifie que le seuil est le plus petit, et pas seulement qu'il fonctionne.

Correction 7

La fonction simule 8 épreuves de Bernoulli dont la probabilité de succès est 0,25, puis renvoie le nombre de succès obtenu dans cette réalisation. La valeur est donc un entier de 0 à 8, pas le nombre 0,25 et pas une probabilité.

Deux exécutions peuvent donner des valeurs différentes parce que la fonction utilise un tirage aléatoire à chaque essai. Sur un grand nombre d'exécutions, la fréquence moyenne des succès devrait se rapprocher de 0,25, sans être égale à cette valeur à chaque exécution.

Correction 8

a) Chaque demande est un essai de Bernoulli, de succès « correctement traitée », avec $p = 0,95$. Les dix demandes sont indépendantes. Ainsi

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(10, 0,95)}.$$

b) « Au moins neuf » signifie $X = 9$ ou $X = 10$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 9) &= \binom{10}{9}(0,95)^9(0,05) + (0,95)^{10} \\ &\approx 0,3151247 + 0,5987369 \\ &\approx \boxed{0,9138616}.\end{aligned}$$

c) En pourcentage, cela donne environ

$$0,9138616 \times 100 = \boxed{91,39 \%}.$$

Le modèle prévoit donc un peu plus de neuf chances sur dix d'avoir au moins neuf traitements corrects.

Point de méthode

Pour un seuil, écrire les deux comparaisons $\mathbb{P}(X \geq k) \leq \alpha$ et $\mathbb{P}(X \geq k - 1) > \alpha$. Cette seconde ligne est la justification de la minimalité.

4 Rappel différé : corrections

Correction R1

$$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{4}{3} (0,5)^3 (0,5)^{4-3} = \boxed{\binom{4}{3} (0,5)^4}.$$

Correction R2

Le long d'un chemin, on **multiplie** les probabilités successives. Entre plusieurs chemins disjoints qui répondent à la même question, on **additionne** les probabilités obtenues.

Correction R3

Les événements $X = 0$ et $X \geq 1$ sont contraires et couvrent tous les cas. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0).$$

Correction R4

Une simulation ne remplace pas un calcul exact parce qu'elle dépend du hasard et qu'elle ne porte que sur un nombre fini d'essais. Elle donne une estimation expérimentale, qui peut varier d'une exécution à l'autre.