

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Schéma de Bernoulli

Répéter une épreuve simple pour compter les succès

Succession d'épreuves indépendantes, loi binomiale et seuils

Objectifs

- Reconnaître une succession d'épreuves indépendantes et la représenter par un arbre.
- Modéliser une épreuve de Bernoulli et identifier ses paramètres.
- Calculer une probabilité avec une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
- Traduire une question de seuil ou de complément et contrôler le résultat.

Cadre du cours. On vise la session 2027 du baccalauréat général, spécialité mathématiques. Le programme de référence est celui du Bulletin officiel spécial n° 8 du 25 juillet 2019. Le nouveau programme publié le 2 avril 2026 ne s'appliquera en terminale qu'à partir de la rentrée 2027–2028. Les exercices sont créés pour ce cours et ne sont pas des sujets officiels.

Organisation conseillée. Prévoir cinq séances de 35 à 45 minutes :

1. diagnostic, arbres et indépendance ;
2. épreuve de Bernoulli et probabilité d'une issue ;
3. loi binomiale et expression de $\mathbb{P}(X = k)$;
4. probabilités cumulées, compléments et seuils ;
5. exercices de synthèse, simulation et rappel différé.

Table des matières

1	Avant de commencer : diagnostic et rappels	3
2	1. Succession d'épreuves indépendantes	4
3	2. Épreuve et loi de Bernoulli	5
4	3. Probabilités cumulées et problèmes de seuil	6
5	4. Exercices gradués	8
6	Bilan et rappel différé	10

1 Avant de commencer : diagnostic et rappels

Durée : 12 minutes, sans calculatrice. Les réponses détaillées se trouvent dans le fascicule séparé. Tu peux noter « à revoir » sans interrompre la suite.

- D1.** Un événement A a une probabilité 0,3. Calculer $\mathbb{P}(\overline{A})$ et expliquer ce que représente $\overline{A}$.
- D2.** Deux épreuves indépendantes ont des probabilités de succès 0,8 et 0,7. Calculer la probabilité d'obtenir deux succès.
- D3.** Une pièce équilibrée est lancée deux fois. Écrire les quatre issues possibles avec les lettres P et F .
- D4.** Calculer $\binom{5}{2}$. Que compte ce nombre ?
- D5.** Dans une répétition de cinq essais, que signifie $0,9^4 \times 0,1$?
- D6.** Calculer la probabilité d'obtenir au moins un succès en trois essais indépendants de probabilité de succès 0,2.

1.1 Rappels ciblés

Événement contraire. $\overline{A}$ signifie « A ne se réalise pas ». Les événements A et $\overline{A}$ couvrent toutes les possibilités, donc $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Probabilité conditionnelle. La notation $\mathbb{P}_A(B)$, ou $\mathbb{P}(B \mid A)$, signifie la probabilité de B lorsque l'on sait que A est réalisé. Dans un arbre, on multiplie les probabilités le long d'un chemin et on additionne les chemins qui répondent à la question.

Coefficient binomial. $\binom{n}{k}$ compte le nombre de façons de choisir k positions parmi n , sans ordre. Il vaut

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

À retenir

Dans un arbre, on multiplie le long d'une branche et on additionne les branches disjointes. Pour utiliser une loi binomiale, vérifier quatre points : n essais, deux issues par essai, même probabilité p de succès, et indépendance.

2 1. Succession d'épreuves indépendantes

2.1 Le modèle

Une épreuve possède un ensemble d'issues possibles. Une succession de n épreuves a pour issue un n -uplet $(x_1, \dots, x_n)$. Les épreuves sont **indépendantes** lorsque la réalisation des précédentes ne modifie pas les probabilités de la suivante.

Dans ce cas, la probabilité d'un chemin est le produit :

$$\mathbb{P}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(x_1) \times \mathbb{P}(x_2) \times \dots \times \mathbb{P}(x_n).$$

Le produit cartésien permet de décrire toutes les issues : $E_1 \times E_2$ est l'ensemble des couples (x_1, x_2) avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.

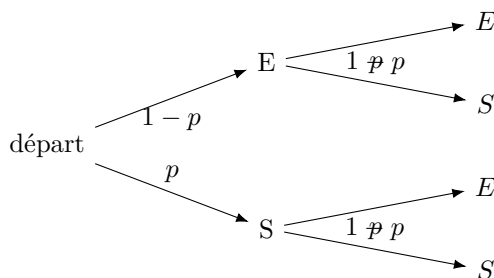


FIGURE 1 – Deux épreuves indépendantes : chaque chemin reçoit le produit des probabilités.

Exemple entièrement détaillé

Une application est réussie avec probabilité 0,8, et une seconde application indépendante est réussie avec probabilité 0,6. Notons S un succès.

1. Deux succès correspondent au chemin S, S . Sa probabilité est

$$\mathbb{P}(S, S) = 0,8 \times 0,6 = 0,48.$$

2. Un seul succès correspond aux deux chemins (S, E) et (E, S) .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{un seul succès}) &= 0,8 \times 0,4 + 0,2 \times 0,6 \\ &= 0,32 + 0,12 = 0,44. \end{aligned}$$

3. Au moins un succès est le contraire de deux échecs :

$$\mathbb{P}(\text{au moins un succès}) = 1 - 0,2 \times 0,4 = \boxed{0,92}.$$

2.2 Ne pas confondre indépendance et incompatibilité

Deux événements indépendants peuvent être réalisés en même temps : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Deux événements incompatibles ne peuvent pas être réalisés ensemble : $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$. Ils ne sont généralement pas indépendants, sauf cas particulier.

3 2. Épreuve et loi de Bernoulli

3.1 Une seule épreuve

Une **épreuve de Bernoulli** ne possède que deux issues :

- le succès, de probabilité p ;
- l'échec, de probabilité $1 - p$.

Le nombre p vérifie $0 \leq p \leq 1$. La variable aléatoire Y qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec suit la loi de Bernoulli de paramètre p , notée parfois $\mathcal{B}(1, p)$.

Valeur de Y	0	1
Signification	échec	succès
$\mathbb{P}(Y = \cdot)$	$1 - p$	p

3.2 Le schéma de Bernoulli

Un **schéma de Bernoulli** est une répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes, ayant toutes la même probabilité p de succès. On note X le nombre total de succès.

Pour obtenir exactement k succès :

1. on choisit les k positions des succès : $\binom{n}{k}$ choix ;
2. chaque chemin a la probabilité $p^k(1 - p)^{n-k}$;
3. les chemins sont disjoints, donc on additionne leurs probabilités.

Ainsi, pour $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

On écrit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. La variable X ne peut prendre que les valeurs entières de 0 à n .

Exemple entièrement détaillé

Un contrôle détecte une anomalie avec probabilité $p = 0,8$, et les contrôles sont indépendants. Sur $n = 4$ contrôles, X est le nombre d'anomalies détectées et $X \sim \mathcal{B}(4, 0,8)$.

Exactement trois. Il faut choisir les trois contrôles concernés :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 3) &= \binom{4}{3} (0,8)^3 (0,2)^1 \\ &= 4 \times 0,512 \times 0,2 \\ &= \boxed{0,4096}. \end{aligned}$$

Au moins trois. Les cas $X = 3$ et $X = 4$ sont disjoints :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 3) &= \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) \\ &= 0,4096 + (0,8)^4 \\ &= 0,4096 + 0,4096 \\ &= \boxed{0,8192}. \end{aligned}$$

4 3. Probabilités cumulées et problèmes de seuil

4.1 Traduire les mots

Pour une variable binomiale X :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq k) &= \mathbb{P}(X = 0) + \cdots + \mathbb{P}(X = k), \\ \mathbb{P}(X \geq k) &= \mathbb{P}(X = k) + \cdots + \mathbb{P}(X = n), \\ \mathbb{P}(X > k) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq k), \\ \mathbb{P}(a \leq X \leq b) &= \sum_{k=a}^b \mathbb{P}(X = k).\end{aligned}$$

La valeur de k doit être un entier. « Au moins 4 » signifie $X \geq 4$, et non $X > 4$. « Plus de 4 » signifie $X \geq 5$.

4.2 Calculatrice et algorithme

Une calculatrice peut fournir les probabilités cumulées, mais la modélisation doit être écrite : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, puis l'événement traduit. Un algorithme peut additionner les termes :

```
from math import comb

def proba_binomiale(n, p, k):
    return comb(n, k) * p**k * (1-p)**(n-k)

def proba_au_moins(n, p, k):
    total = 0
    for j in range(k, n+1):
        total = total + proba_binomiale(n, p, j)
    return total
```

La boucle commence à k et va jusqu'à n . Une autre méthode consiste à calculer le complément si la somme demandée comporte beaucoup de termes.

4.3 Simulation

Pour simuler une épreuve de Bernoulli de paramètre p , on tire un nombre au hasard entre 0 et 1 et on considère un succès lorsqu'il est strictement inférieur à p . En répétant cette opération, on obtient une approximation expérimentale, pas une preuve.

```
from random import random

def nombre_de_succes(n, p):
    succes = 0
    for i in range(n):
        if random() < p:
            succes = succes + 1
    return succes
```

À retenir

La formule binomiale comporte trois éléments : le nombre de choix $\binom{n}{k}$, la probabilité p^k des succès et la probabilité $(1 - p)^{n-k}$ des échecs. Commencer par écrire l'événement avec des mots, par exemple « au moins trois », avant de choisir une somme ou un complément.

5 4. Exercices gradués

Les corrections détaillées sont dans le fascicule séparé. Essaie d'abord, puis utilise l'indice si nécessaire.

Exercice 1 – Complément

Compétence : utiliser l'événement contraire. Un tir est réussi avec probabilité 0,7. Deux tirs sont indépendants. Calculer la probabilité de réussir au moins un tir.

Indice.

Le contraire de « au moins un » est « aucun ». Calcule d'abord la probabilité de deux échecs.

Exercice 2 – Arbre à deux niveaux

Compétence : multiplier sur un chemin et additionner des chemins. Une machine A produit une pièce conforme avec probabilité 0,9, et une machine indépendante B avec probabilité 0,8. Calculer la probabilité que les deux pièces soient conformes, puis celle qu'une seule le soit.

Indice.

Pour « une seule », additionne les chemins $(C, \overline{C})$ et $(\overline{C}, C)$.

Exercice 3 – Identifier le schéma

Compétence : vérifier les hypothèses du modèle. On lance un dé équilibré cinq fois, indépendamment. On appelle succès l'obtention d'un six.

- a) Donner n et p .
- b) Définir la variable X .
- c) Quelle loi suit X ?

Indice.

Une épreuve n'a pas besoin d'être équilibrée pour être une épreuve de Bernoulli : il faut seulement distinguer succès et échec.

Exercice 4 – Probabilité d'un nombre de succès

Compétence : appliquer la formule binomiale. Dans un schéma $\mathcal{B}(6, 0,3)$, calculer $\mathbb{P}(X = 2)$.

Indice.

Il y a $\binom{6}{2}$ positions possibles pour les deux succès.

Exercice 5 – Probabilité cumulée

Compétence : traduire une question et sommer. Dans un schéma $\mathcal{B}(5, 0,4)$, calculer $\mathbb{P}(X \leq 1)$, puis $\mathbb{P}(X \geq 2)$.

Indice.

Pour la première probabilité, additionne les termes $k = 0$ et $k = 1$. La seconde est son complément.

Exercice 6 – Seuil de probabilité

Compétence : chercher un seuil entier. Dans $\mathcal{B}(10, 0,6)$, chercher le plus petit entier k tel que $\mathbb{P}(X \geq k) \leq 0,2$. Utiliser une calculatrice ou un programme et présenter le test qui justifie le « plus petit ».

Indice.

Calcule les probabilités en partant de $k = 10$ ou utilise le complément avec une somme cumulée. Vérifie le seuil trouvé et le seuil juste précédent.

Exercice 7 – Lecture d'un programme

Compétence : comprendre une simulation. On exécute la fonction `nombre_de_succes` avec les arguments 8 et 0,25. Que représente la valeur renvoyée ? Pourquoi deux exécutions peuvent-elles donner des valeurs différentes ?

Indice.

Le programme simule huit épreuves de Bernoulli et compte les succès. Un résultat aléatoire n'est pas une probabilité exacte.

Exercice 8 – Problème de synthèse

Compétence : modéliser, calculer et interpréter. Un serveur reçoit dix demandes indépendantes. Une demande est traitée correctement avec probabilité 0,95. On note X le nombre de demandes correctement traitées.

- Donner la loi de X .
- Calculer la probabilité qu'au moins neuf demandes soient correctement traitées.
- Interpréter le résultat en pourcentage, au centième près.

Indice.

« Au moins neuf » correspond à $\mathbb{P}(X = 9) + \mathbb{P}(X = 10)$. Les erreurs ont probabilité 0,05.

6 Bilan et rappel différé

6.1 Erreurs fréquentes

- Utiliser une loi binomiale sans vérifier l'indépendance ou la même probabilité de succès.
- Confondre « au moins k » ($X \geq k$) et « plus de k » ($X > k$).
- Oublier $\binom{n}{k}$ et ne compter qu'un seul ordre des succès.
- Multiplier des chemins qui doivent être additionnés, ou additionner des étapes qui doivent être multipliées.
- Présenter une simulation comme une valeur exacte.

6.2 Auto-évaluation

- ☐ Je sais décider si une situation est un schéma de Bernoulli.
- ☐ Je sais définir le succès, n , p et la variable X .
- ☐ Je sais calculer $\mathbb{P}(X = k)$ et expliquer chaque facteur.
- ☐ Je sais traduire « au plus », « au moins », « plus de ».
- ☐ Je sais contrôler un seuil en testant le rang précédent.

6.3 Rappel différé

R1. Si $X \sim \mathcal{B}(4, 0,5)$, écrire sans calculer $\mathbb{P}(X = 3)$.

R2. Dans une situation indépendante, que fait-on le long d'un chemin d'arbre ? Et entre plusieurs chemins disjoints ?

R3. Expliquer pourquoi $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0)$.

R4. Donner deux raisons pour lesquelles une simulation ne remplace pas le calcul d'une probabilité.

En cas de blocage. Revenir à la phrase : « une épreuve, un succès, un échec, n répétitions indépendantes ». Puis traduire l'événement avant de toucher à la calculatrice.