

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Corrections expliquées

Sommes de variables aléatoires

À consulter après une première recherche personnelle

Utilisation. Cherche d’abord dans le fascicule du cours. Lis son indice si tu es bloquée, puis compare la structure de ta démarche avec la correction. Les exercices sont des créations pédagogiques et non des sujets officiels.

Rappel central. L’espérance est linéaire sans hypothèse d’indépendance. L’addition des variances nécessite en revanche l’indépendance prévue par le modèle.

Table des matières

1	Diagnostic : réponses et rappels ciblés	3
2	Corrections des exercices 1 à 4	4
3	Corrections des exercices 5 à 8	5
4	Rappel différé : corrections	6

1 Diagnostic : réponses et rappels ciblés

Correction D1

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times 0,4 + 3 \times 0,6 = 0,4 + 1,8 = \boxed{2,2}.$$

On obtient une moyenne pondérée, pas la moyenne non pondérée $(1+3)/2 = 2$, car les deux valeurs n'ont pas la même probabilité.

Correction D2

La formule est

$$V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

La seconde écriture est souvent plus rapide pour un tableau de valeurs.

Correction D3

Par linéarité :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(2X + 5) = 2\mathbb{E}(X) + 5.$$

Le nombre 5 est une constante : il s'ajoute à l'espérance.

Correction D4

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{9} = \boxed{3}.$$

Correction D5

Les variables sont indépendantes, donc les variances s'additionnent :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) = 4 + 7 = \boxed{11}.$$

Correction D6

Chaque I_i vaut 1 exactement lorsqu'il y a un succès. Dans la somme, chaque succès contribue 1 et chaque échec contribue 0. Ainsi

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5$$

est le nombre total de succès.

Point de méthode

Le diagnostic distingue trois idées : moyenne pondérée pour l'espérance, dispersion pour la variance et rôle de l'indépendance. Cette distinction évite d'appliquer une seule formule à toutes les questions.

2 Corrections des exercices 1 à 4

Correction 1

On multiplie chaque valeur par sa probabilité :

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times 0,2 + 3 \times 0,8 = 0,2 + 2,4 = \boxed{2,6}.$$

La valeur 3 pèse davantage dans la moyenne car elle est plus probable.

Correction 2

On utilise la linéarité :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(3X - 2) = 3\mathbb{E}(X) - 2 = 3 \times 4 - 2 = \boxed{10}.$$

Il n'était pas nécessaire de connaître toute la loi de X .

Correction 3

On définit

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i\text{-ième essai est un succès,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le nombre de succès est $X = I_1 + I_2$. Pour chaque indicatrice, $\mathbb{E}(I_i) = 0,4$, donc

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(I_1) + \mathbb{E}(I_2) = 0,4 + 0,4 = \boxed{0,8}.$$

Correction 4

La formule de changement d'échelle donne

$$V(2X + 7) = 2^2 V(X) = 4 \times 5 = \boxed{20}.$$

La constante 7 ne modifie pas les écarts entre les valeurs. Si $\sigma(X) = \sqrt{5}$, alors

$$\sigma(2X + 7) = |2| \sigma(X) = \boxed{2\sqrt{5}}.$$

3 Corrections des exercices 5 à 8

Correction 5

Pour une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:

$$\mathbb{E}(X) = np, \quad \mathbb{V}(X) = np(1 - p).$$

Ici $n = 12$ et $p = 0,25$, donc

$$\mathbb{E}(X) = 12 \times 0,25 = \boxed{3},$$

$$\mathbb{V}(X) = 12 \times 0,25 \times 0,75 = \boxed{2,25},$$

et

$$\sigma(X) = \sqrt{2,25} = \boxed{1,5}.$$

Correction 6

Pour un dé, $\mathbb{E}(X) = 7/2$ et $\mathbb{V}(X) = 35/12$. Si $T = X + Y$ est la somme des deux dés :

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = \boxed{7}.$$

Les lancers sont indépendants, donc

$$\mathbb{V}(T) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \boxed{\frac{35}{6}}.$$

Correction 7

La variable demandée est la moyenne. Sa formule est

$$\mathbb{E}(M_n) = \mu, \quad \sigma(M_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Avec $\mu = 12$, $\sigma = 3$ et $n = 36$:

$$\mathbb{E}(M_{36}) = \boxed{12}, \quad \sigma(M_{36}) = \frac{3}{\sqrt{36}} = \boxed{0,5}.$$

La moyenne reste centrée autour de 12, mais ses fluctuations typiques sont plus petites que celles d'une mesure isolée.

Correction 8

Le coût total est

$$T = 2 + X_1 + \cdots + X_5.$$

a) Par linéarité :

$$\mathbb{E}(T) = 2 + 5 \times 8 = \boxed{42 \text{ euros}}.$$

b) La constante ne contribue pas à la variance. Les cinq coûts sont indépendants, donc

$$\mathbb{V}(T) = 5 \times 1,44 = \boxed{7,2 \text{ euros}^2}.$$

L'écart type est

$$\sigma(T) = \sqrt{7,2} \approx \boxed{2,68 \text{ euros}}.$$

c) Ajouter 2 déplace chaque coût total de 2 euros, donc augmente l'espérance. Les écarts à la moyenne restent identiques, donc la variance et l'écart type ne changent pas.

Point de méthode

Dans une rédaction, écrire la décomposition de la variable avant la formule. C'est elle qui montre si l'on traite une somme, une moyenne ou une transformation affine.

4 Rappel différé : corrections

Correction R1

$$\mathbb{E}(4X - 1) = 4\mathbb{E}(X) - 1 = 4 \times 5 - 1 = \boxed{19}.$$

Correction R2

$$\sigma(X) = \sqrt{9} = \boxed{3}, \quad V(3X) = 3^2 V(X) = 9 \times 9 = \boxed{81}.$$

Correction R3

Pour un échantillon de taille n , l'écart type de la moyenne est

$$\sigma(M_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Il diminue, mais il n'est pas nul pour une taille finie.

Correction R4

On introduit une indicatrice par essai. Elle vaut 1 pour un succès et 0 pour un échec. La somme des indicatrices compte donc exactement les succès :

$$X = I_1 + \cdots + I_n.$$