

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Sommes de variables aléatoires

Additionner des résultats aléatoires sans perdre leur sens

Espérance, variance, écart type et échantillons

Objectifs

- Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire ou d'une transformation simple.
- Utiliser la linéarité de l'espérance pour une somme.
- Utiliser l'additivité de la variance lorsque l'indépendance est donnée par le modèle.
- Décrire l'espérance, la variance et l'écart type d'une somme ou d'une moyenne d'échantillon.

Cadre du cours. On vise la session 2027 du baccalauréat général, spécialité mathématiques. Le programme de référence est celui du Bulletin officiel spécial n° 8 du 25 juillet 2019. Dans ce cadre, l'indépendance des variables est utilisée lorsqu'elle fait partie d'une succession d'épreuves indépendantes; il n'est pas demandé de la démontrer pour des variables données a priori. Les exercices sont créés pour ce cours.

Organisation conseillée. Prévoir cinq séances de 35 à 45 minutes :

1. diagnostic, espérance et indicatrice de succès;
2. linéarité de l'espérance;
3. variance, écart type et indépendance;
4. sommes et moyennes d'échantillons;
5. loi binomiale, synthèse et rappel différé.

Table des matières

1	Avant de commencer : diagnostic et rappels	3
2	1. Espérance et variables indicatrices	4
3	2. Variance et écart type	5
4	3. Application à la loi binomiale	6
5	4. Échantillon : somme et moyenne	7
6	5. Exercices gradués	8
7	Bilan et rappel différé	10

1 Avant de commencer : diagnostic et rappels

Durée : 12 minutes, sans calculatrice. Le diagnostic sert à choisir le bon rappel, pas à attribuer une note.

- D1.** Une variable X prend 1 avec probabilité 0,4 et 3 avec probabilité 0,6. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
- D2.** Rappeler la formule de la variance $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.
- D3.** Si $Y = 2X + 5$, quelle relation relie $\mathbb{E}(Y)$ à $\mathbb{E}(X)$?
- D4.** Si $V(X) = 9$, quel est l'écart type de X ?
- D5.** Deux variables indépendantes vérifient $V(X) = 4$ et $V(Y) = 7$. Calculer $V(X + Y)$.
- D6.** Dans cinq essais de Bernoulli, I_i vaut 1 si le i -ième essai est un succès et 0 sinon. Que représente $I_1 + \dots + I_5$?

1.1 Rappels ciblés

L'espérance est une moyenne pondérée des valeurs possibles :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x \mathbb{P}(X = x).$$

La variance mesure la dispersion autour de l'espérance :

$$V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

L'écart type est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$, dans la même unité que X .

À retenir

Pour une somme, l'espérance s'additionne toujours. La variance s'additionne pour des variables indépendantes, hypothèse à repérer dans l'énoncé. Un facteur a multiplie l'espérance par a , mais la variance par a^2 .

2 1. Espérance et variables indicatrices

2.1 Pourquoi décomposer une variable ?

Une variable compliquée peut souvent être écrite comme une somme de petites variables. Dans un schéma de Bernoulli, on définit I_i par

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{si le } i\text{-ième essai est un succès,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le nombre total de succès est alors

$$X = I_1 + I_2 + \cdots + I_n.$$

Cette écriture est utile même si l'on ne calcule pas toute la loi de X .

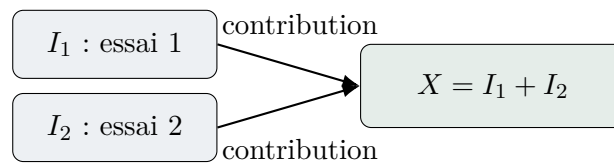


FIGURE 1 – Décomposer un nombre de succès en contributions simples.

2.2 Linéarité de l'espérance

Pour deux variables aléatoires X et Y , et un réel a ,

$$\boxed{\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)}, \quad \boxed{\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)}.$$

Plus généralement, $\mathbb{E}(aX + bY + c) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y) + c$. Aucune indépendance n'est nécessaire pour ces relations.

Exemple entièrement détaillé

Un jeu comporte deux gains aléatoires X et Y , avec $\mathbb{E}(X) = 4$ euros et $\mathbb{E}(Y) = -1,5$ euro. Le gain total est $T = X + Y$.

1. On reconnaît une somme, donc

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 4 + (-1,5) = \boxed{2,5 \text{ euros}}.$$

2. Si le joueur reçoit en plus une prime fixe de 3 euros, le nouveau gain est $T' = T + 3$.

Ainsi

$$\mathbb{E}(T') = \mathbb{E}(T) + 3 = 2,5 + 3 = \boxed{5,5 \text{ euros}}.$$

L'espérance ne signifie pas que le joueur gagnera exactement 2,5 euros à une partie donnée. Elle décrit la moyenne à long terme du modèle.

2.3 Espérance d'une indicatrice

Si I vaut 1 avec probabilité p et 0 avec probabilité $1 - p$,

$$\mathbb{E}(I) = 0(1 - p) + 1p = p.$$

Pour $X = I_1 + \cdots + I_n$, avec des succès de probabilité p ,

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(I_1) + \cdots + \mathbb{E}(I_n) = np.$$

3 2. Variance et écart type

3.1 Transformations

Pour un réel a et une constante b :

$$\boxed{V(aX + b) = a^2 V(X)}, \quad \boxed{\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)}.$$

Ajouter une constante déplace toutes les valeurs mais ne change pas leur dispersion. Multiplier par a agrandit les écarts ; c'est pourquoi le carré apparaît dans la variance.

3.2 Variance d'une somme indépendante

Dans le cadre d'une succession d'épreuves indépendantes, si X et Y sont indépendantes :

$$\boxed{V(X + Y) = V(X) + V(Y)}.$$

De même, pour $aX + bY$:

$$V(aX + bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y)$$

lorsque X et Y sont indépendantes. Cette propriété ne se transpose pas automatiquement à des variables dépendantes.

Exemple entièrement détaillé

On lance deux dés équilibrés indépendants. X est le résultat du premier dé et Y celui du second. Pour un dé :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{7}{2},$$

et

$$V(X) = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + 6^2}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}.$$

Le total $T = X + Y$ vérifie donc

$$\mathbb{E}(T) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = \boxed{7},$$

et, grâce à l'indépendance,

$$V(T) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \boxed{\frac{35}{6}}.$$

Son écart type vaut

$$\sigma(T) = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2,42.$$

Le total est centré autour de 7, mais il fluctue autour de cette moyenne.

4 3. Application à la loi binomiale

Dans un schéma de Bernoulli, $X = I_1 + \dots + I_n$, où chaque indicatrice vaut 1 avec probabilité p et les I_i sont indépendantes.

Pour une indicatrice I_i :

$$\mathbb{E}(I_i) = p, \quad \mathbb{V}(I_i) = \mathbb{E}(I_i^2) - \mathbb{E}(I_i)^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$

Par linéarité et additivité :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = np}, \quad \boxed{\mathbb{V}(X) = np(1 - p)}, \quad \boxed{\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}}.$$

Exemple entièrement détaillé

Dans un schéma $\mathcal{B}(5, 0,3)$, X compte les succès.

1. L'espérance est

$$\mathbb{E}(X) = 5 \times 0,3 = \boxed{1,5}.$$

2. La variance est

$$\mathbb{V}(X) = 5 \times 0,3 \times 0,7 = \boxed{1,05}.$$

3. L'écart type est

$$\sigma(X) = \sqrt{1,05} \approx \boxed{1,025}.$$

Le nombre moyen de succès est 1,5, même si le nombre observé est toujours un entier.

5 4. Échantillon : somme et moyenne

5.1 Définitions

Un échantillon de taille n d'une loi est une liste $(X_1, \dots, X_n)$ de variables indépendantes qui suivent toutes cette même loi. On définit la somme

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

et la moyenne

$$M_n = \frac{S_n}{n}.$$

Si chaque X_i a une espérance μ , une variance V et un écart type σ , alors

$$\boxed{\mathbb{E}(S_n) = n\mu}, \quad \boxed{V(S_n) = nV}, \quad \boxed{\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma}.$$

Pour la moyenne :

$$\boxed{\mathbb{E}(M_n) = \mu}, \quad \boxed{V(M_n) = \frac{V}{n}}, \quad \boxed{\sigma(M_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

La moyenne reste centrée autour de μ , mais son écart type diminue avec n . Cette diminution prépare la loi des grands nombres.

Exemple entièrement détaillé

Le temps de réponse X d'une requête a une espérance de 20 ms et un écart type de 4 ms. On observe un échantillon indépendant de 100 requêtes.

$$\mathbb{E}(S_{100}) = 100 \times 20 = \boxed{2000 \text{ ms}}, \quad \sigma(S_{100}) = \sqrt{100} \times 4 = \boxed{40 \text{ ms}}.$$

Pour le temps moyen :

$$\mathbb{E}(M_{100}) = 20 \text{ ms}, \quad \sigma(M_{100}) = \frac{4}{\sqrt{100}} = \boxed{0,4 \text{ ms}}.$$

La moyenne n'est pas forcément exactement 20 ms, mais elle est moins dispersée que le temps d'une requête.

À retenir

Pour une somme, additionner les espérances. Pour la variance, additionner les variances seulement lorsque l'indépendance est disponible. Pour une moyenne de n observations, l'espérance ne change pas et l'écart type est divisé par $\sqrt{n}$.

6 5. Exercices gradués

Les corrections détaillées sont dans le fascicule séparé.

Exercice 1 – Espérance par tableau

Compétence : calculer une moyenne pondérée. La variable X prend les valeurs 1 et 3, avec probabilités 0,2 et 0,8. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Indice.

Multiplie chaque valeur par sa probabilité, puis additionne.

Exercice 2 – Transformation affine

Compétence : utiliser la linéarité de l'espérance. On sait que $\mathbb{E}(X) = 4$ et $Y = 3X - 2$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Indice.

Écris $\mathbb{E}(3X - 2) = 3\mathbb{E}(X) - 2$.

Exercice 3 – Somme de deux indicatrices

Compétence : représenter un nombre de succès comme une somme. Deux essais indépendants ont une probabilité 0,4 de succès. Définir les indicatrices I_1, I_2 , puis calculer l'espérance du nombre X de succès.

Indice.

Écris $X = I_1 + I_2$ et $\mathbb{E}(I_i) = 0,4$.

Exercice 4 – Variance et changement d'échelle

Compétence : comprendre le carré du facteur. On sait que $V(X) = 5$. Calculer $V(2X + 7)$, puis l'écart type si $\sigma(X) = \sqrt{5}$.

Indice.

La constante 7 ne change pas la dispersion ; le facteur 2 est élevé au carré pour la variance.

Exercice 5 – Loi binomiale et indicatrices

Compétence : calculer les indicateurs d'une loi binomiale. Dans $\mathcal{B}(12, 0,25)$, calculer $\mathbb{E}(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Indice.

Utilise np , $np(1 - p)$ et la racine carrée.

Exercice 6 – Somme de deux dés

Compétence : additionner espérances et variances indépendantes. Deux dés équilibrés indépendants sont lancés. Calculer l'espérance et la variance de leur somme. Tu peux utiliser les résultats du cours pour un dé.

Indice.

Un dé a espérance $7/2$ et variance $35/12$.

Exercice 7 – Moyenne d'un échantillon

Compétence : distinguer somme et moyenne. Une mesure X a $\mathbb{E}(X) = 12$ et $\sigma(X) = 3$. Pour un échantillon indépendant de taille $n = 36$, calculer $\mathbb{E}(M_{36})$ et $\sigma(M_{36})$. Interpréter.

Indice.

Pour une moyenne, l'espérance reste μ et l'écart type devient $\sigma/\sqrt{n}$.

Exercice 8 – Problème de synthèse

Compétence : choisir une décomposition et interpréter les unités. Une commande comporte un coût fixe de 2 euros et 5 articles dont les coûts $X_1, \dots, X_5$ sont indépendants, de même espérance 8 euros et de même variance 1,44 euro carré. Le coût total est $T = 2 + X_1 + \dots + X_5$.

- a) Calculer $\mathbb{E}(T)$.
- b) Calculer $V(T)$ et $\sigma(T)$.
- c) Pourquoi la constante 2 intervient-elle dans l'espérance mais pas dans la variance ?

Indice.

Traite le coût fixe séparément, puis utilise les formules de la somme de cinq variables indépendantes.

7 Bilan et rappel différé

7.1 Erreurs fréquentes

- Diviser l'espérance d'une somme par n : c'est la moyenne, pas la somme.
- Écrire $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ sans hypothèse d'indépendance.
- Oublier le carré dans $V(aX) = a^2 V(X)$.
- Confondre variance et écart type : l'écart type est la racine de la variance.
- Dire que $\mathbb{E}(X) = 12$ signifie que $X = 12$ à chaque observation.

7.2 Auto-évaluation

- ☐ Je sais expliquer une espérance comme une moyenne pondérée.
- ☐ Je sais utiliser la linéarité sans ajouter une hypothèse inutile.
- ☐ Je sais repérer quand l'indépendance autorise l'addition des variances.
- ☐ Je sais distinguer S_n , M_n , leur variance et leur écart type.
- ☐ Je sais retrouver les indicateurs de $\mathcal{B}(n, p)$ par des indicatrices.

7.3 Rappel différé

R1. Si $\mathbb{E}(X) = 5$, calculer $\mathbb{E}(4X - 1)$.

R2. Si $V(X) = 9$, calculer $\sigma(X)$ et $V(3X)$.

R3. Pour un échantillon de taille n , que devient l'écart type de la moyenne ?

R4. Dans un schéma $\mathcal{B}(n, p)$, pourquoi le nombre de succès est-il une somme de variables plus simples ?

En cas de blocage. Écrire d'abord la variable demandée sous forme de somme ou de transformation affine. Ensuite seulement choisir la formule d'espérance, de variance ou d'écart type.