

Fiche d'histoire mathématique

Résumer l'incertain par des nombres

Espérance, dispersion et échantillons

Idée directrice. Une variable aléatoire transforme un résultat incertain en nombre. L'espérance résume le centre de gravité des résultats ; la variance et l'écart type mesurent leur dispersion. Ces outils sont nés des jeux, puis sont devenus ceux de la mesure scientifique et des statistiques.

Table des matières

1	De l'espérance de gain à la moyenne	1
2	Les indicatrices : décomposer un événement	1
3	Variance, erreurs et mesures	1
4	Sommes et moyennes d'échantillons	2
5	À retenir	2
6	Pour aller plus loin	2

1 De l'espérance de gain à la moyenne

Dans les problèmes de jeux du XVII^e siècle, on cherche la valeur moyenne d'un gain avant de jouer. Huygens publie en 1657 un traité sur le raisonnement dans les jeux de hasard, en s'appuyant sur les travaux de Pascal et Fermat.

L'espérance n'est pas forcément une valeur que l'on observe. Pour un dé, elle vaut $7/2$, même si aucun lancer ne donne $7/2$. Elle représente la moyenne vers laquelle le gain moyen se rapproche lorsque l'expérience est répétée dans des conditions comparables.

2 Les indicatrices : décomposer un événement

Pour compter les succès, on peut associer à chaque épreuve une variable qui vaut 1 en cas de succès et 0 sinon. Le nombre total de succès devient une somme de variables simples :

$$X = I_1 + \cdots + I_n.$$

Cette décomposition explique la linéarité de l'espérance. Elle permet de raisonner sans connaître toute la loi de X , seulement l'espérance de chaque indicatrice.

3 Variance, erreurs et mesures

Lorsque l'astronomie et la géodésie se développent, les mesures ne coïncident jamais exactement. Il faut distinguer une valeur moyenne d'une incertitude. La variance utilise les carrés des écarts à la moyenne pour éviter que les écarts positifs et négatifs ne s'annulent :

$$V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

La racine carrée, l'écart type, retrouve l'unité de la grandeur mesurée.

Gauss et Laplace relient au XIX^e siècle les erreurs de mesure aux distributions et à la méthode des moindres carrés. Le carré n'est donc pas un choix arbitraire : il pénalise les grands écarts et se combine bien avec les calculs algébriques.

4 Sommes et moyennes d'échantillons

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des observations indépendantes, la somme $S_n = X_1 + \dots + X_n$ décrit un total. La moyenne $M_n = S_n/n$ décrit une observation représentative. L'espérance de la moyenne reste celle d'une observation, tandis que son écart type est divisé par $\sqrt{n}$. C'est l'une des raisons pour lesquelles répéter des mesures rend une estimation plus stable.

Au XX^e siècle, la statistique mathématique systématise ces outils pour les sondages, la qualité industrielle, la médecine et les sciences sociales. Les formules restent liées à une question simple : quelle part du hasard vient du centre et quelle part vient de la dispersion ?

Repère	Apport
1654–1657	Pascal, Fermat et Huygens fondent le calcul des gains moyens.
XVIII ^e siècle	Bernoulli et de Moivre étudient les répétitions.
XIX ^e siècle	Gauss et Laplace relient erreurs, moyennes et dispersion.
XX ^e siècle à aujourd'hui	Échantillons, sondages et statistiques appliquées.

5 À retenir

L'espérance décrit un centre théorique ; la variance décrit une dispersion en unités carrées ; l'écart type revient aux unités de départ. La somme et la moyenne ne répondent pas à la même question, même si elles utilisent les mêmes observations.

6 Pour aller plus loin

- MacTutor, histoire de Jacob Bernoulli, des séries et des probabilités : Jacob Bernoulli.
- Pour l'origine des moindres carrés et le rôle de Gauss et Legendre : historique des moindres carrés.
- Pour la répétition d'épreuves, consulter la fiche d'histoire du schéma de Bernoulli.