

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Corrections expliquées

Concentration, loi des grands nombres

À consulter après une première recherche personnelle

Utilisation. Cherche d’abord dans le fascicule du cours, puis lis l’indice et compare ta méthode avec la correction. Les exercices sont des créations pédagogiques et non des sujets officiels.

Rappel central. Pour une variable d’espérance μ et de variance V ,

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}.$$

Pour la moyenne de n observations indépendantes de même loi, le dénominateur devient $n\delta^2$.

Table des matières

1	Diagnostic : réponses et rappels ciblés	3
2	Corrections des exercices 1 à 4	4
3	Corrections des exercices 5 à 7	5
4	Rappel différé : corrections	6

1 Diagnostic : réponses et rappels ciblés

Correction D1

Pour une Bernoulli de paramètre p ,

$$\mathbb{E}(X) = p = 0,4, \quad \mathbb{V}(X) = p(1 - p) = 0,4 \times 0,6 = \boxed{0,24}.$$

Correction D2

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{0,24} = \sqrt{\frac{6}{25}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{5}}.$$

Correction D3

La moyenne d'un échantillon de taille n a pour écart type

$$\boxed{\sigma(M_n) = \frac{5}{\sqrt{n}}}.$$

La division par $\sqrt{n}$, et non par n , vient de la variance $\mathbb{V}(M_n) = V/n$.

Correction D4

$|X - \mu| \geq \delta$ signifie que la réalisation X est éloignée de μ d'au moins δ . C'est l'extérieur de l'intervalle $]\mu - \delta, \mu + \delta[$.

Correction D5

La borne de concentration doit être au plus α :

$$\frac{0,24}{n(0,05)^2} \leq 0,05.$$

On devra donc obtenir une condition de la forme

$$n \geq \frac{0,24}{0,05(0,05)^2}.$$

Correction D6

Non. La phrase décrit une probabilité associée au modèle. Une réalisation particulière de M_n peut être proche de μ , mais aussi s'en écarter. Une probabilité élevée n'est pas une certitude.

Point de méthode

Avant le calcul, traduire l'événement en intervalle : $|X - \mu| < \delta$ équivaut à $\mu - \delta < X < \mu + \delta$. Cette étape facilite l'interprétation finale.

2 Corrections des exercices 1 à 4

Correction 1

Avec $\mu = 10$, $V = 4$ et $\delta = 5$:

$$\mathbb{P}(|X - 10| \geq 5) \leq \frac{4}{5^2} = \boxed{\frac{4}{25} = 0,16}.$$

En passant à l'événement contraire :

$$\mathbb{P}(|X - 10| < 5) \geq 1 - \frac{4}{25} = \boxed{\frac{21}{25} = 0,84}.$$

Correction 2

Pour une Bernoulli de paramètre 0,2,

$$V = 0,2 \times 0,8 = 0,16.$$

Avec $n = 400$ et $\delta = 0,1$,

$$\mathbb{P}(|M_{400} - 0,2| \geq 0,1) \leq \frac{0,16}{400(0,1)^2} = \frac{0,16}{4} = \boxed{0,04}.$$

Correction 3

On résout

$$\frac{9}{n(0,5)^2} \leq 0,1.$$

Comme $(0,5)^2 = 0,25$,

$$\frac{9}{0,25n} = \frac{36}{n} \leq 0,1.$$

Il faut donc $n \geq 360$. La taille entière minimale fournie par la méthode est $\boxed{n = 360}$.

Correction 4

a) Cette phrase affirme une probabilité :

$$\mathbb{P}(|M_n - \mu| < 0,02) \geq 0,95.$$

Elle autorise un risque d'au plus 0,05 que l'écart soit au moins 0,02.

b) Cette phrase porte sur une réalisation particulière et affirme directement que l'écart observé est inférieur à 0,02. La phrase a) ne garantit pas b) pour chaque échantillon.

3 Corrections des exercices 5 à 7

Correction 5

On prend $\delta = 2\sigma$ et $V = \sigma^2$. Alors

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq 2\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{(2\sigma)^2} = \frac{\sigma^2}{4\sigma^2} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

Le complément donne

$$\mathbb{P}(|X - \mu| < 2\sigma) \geq \boxed{\frac{3}{4}}.$$

Cette borne est universelle ; elle peut être moins précise que ce qu'une loi particulière permettrait d'obtenir.

Correction 6

La simulation produit 1000 valeurs de la moyenne M_{100} . Pour une valeur choisie de δ , on peut calculer la proportion observée des échantillons vérifiant

$$|M_{100} - 0,5| \geq \delta$$

et la comparer à la borne théorique

$$\frac{V}{100\delta^2} \quad \text{avec} \quad V = 0,5 \times 0,5 = 0,25.$$

Les valeurs ne sont pas identiques car la simulation porte sur un nombre fini de réalisations et dépend du hasard, tandis que la formule donne une majoration théorique.

Correction 7

a) Pour une Bernoulli de paramètre 0,35,

$$V = 0,35 \times 0,65 = 0,2275.$$

On impose

$$\frac{0,2275}{n(0,03)^2} \leq 0,05.$$

Comme $(0,03)^2 = 0,0009$,

$$n \geq \frac{0,2275}{0,05 \times 0,0009} = \frac{0,2275}{0,000045} \approx 5055,56.$$

Il faut donc prendre $\boxed{n = 5056}$ au minimum selon cette borne.

b) La précision demandée est 0,03. L'événement central est

$$|M_n - 0,35| < 0,03,$$

soit $0,32 < M_n < 0,38$. La borne garantit que cet événement a une probabilité d'au moins 0,95.

Point de méthode

Dans un problème de dimensionnement, le quotient $V/(\alpha\delta^2)$ est une taille suffisante. On arrondit toujours vers le haut, car une taille plus petite ne satisfait pas nécessairement la condition demandée.

4 Rappel différé : corrections

Correction R1

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq 1) \leq \frac{2}{1^2} = \boxed{2}.$$

Cette borne est inutilisable telle quelle car une probabilité est au plus 1. On sait seulement ici que la borne universelle n'est pas informative.

Correction R2

$$\boxed{V(M_n) = \frac{V}{n}}.$$

Correction R3

La borne

$$\frac{V}{n\delta^2}$$

est divisée par 2 lorsque n double, toutes les autres quantités étant fixées.

Correction R4

Pour tout $\delta > 0$,

$$\boxed{\mathbb{P}(|M_n - \mu| < \delta) \longrightarrow 1 \quad \text{lorsque } n \longrightarrow +\infty.}$$