

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Concentration

Comprendre pourquoi une moyenne devient plus stable

Inégalité de Bienaymé–Tchebychev et loi des grands nombres

Objectifs

- Interpréter l'espérance, la variance et l'écart type comme des indicateurs de position et de dispersion.
- Appliquer l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev à une variable aléatoire.
- Utiliser l'inégalité de concentration pour déterminer une taille d'échantillon.
- Comprendre la loi des grands nombres sans la confondre avec une certitude pour un échantillon fini.

Cadre du cours. On vise la session 2027 du baccalauréat général, spécialité mathématiques. Le programme de référence est celui du Bulletin officiel spécial n° 8 du 25 juillet 2019. Les exercices sont créés pour l'apprentissage et ne sont pas des sujets officiels. Le nouveau programme publié le 2 avril 2026 s'appliquera en terminale à partir de la rentrée 2027–2028.

Organisation conseillée. Prévoir cinq séances de 35 à 45 minutes :

1. diagnostic, variance et écart type ;
2. inégalité de Bienaymé–Tchebychev ;
3. concentration des moyennes ;
4. loi des grands nombres et simulation ;
5. exercices de synthèse et rappel différé.

Table des matières

1	Avant de commencer : diagnostic et rappels	3
2	1. Mesurer un écart et une dispersion	4
3	2. Concentration d'une moyenne	5
4	3. Loi des grands nombres et simulation	6
5	4. Exercices gradués	7
6	Bilan et rappel différé	9

1 Avant de commencer : diagnostic et rappels

Durée : 12 minutes, sans calculatrice. Ce diagnostic vérifie les outils nécessaires avant d'utiliser des inégalités de probabilité.

- D1.** Une épreuve de Bernoulli a une probabilité de succès $p = 0,4$. Donner son espérance et sa variance.
- D2.** Si $V(X) = 0,24$, calculer son écart type sous forme exacte.
- D3.** Pour une moyenne M_n de n observations d'écart type 5, quelle est la formule de $\sigma(M_n)$?
- D4.** Traduire en français l'événement $|X - \mu| \geq \delta$.
- D5.** Avec $V = 0,24$, $\delta = 0,05$ et un risque maximal $\alpha = 0,05$, quelle inégalité doit vérifier n ?
- D6.** La phrase « la moyenne est proche de l'espérance » signifie-t-elle qu'elle lui est égale à chaque échantillon ?

1.1 Rappels ciblés

L'espérance μ indique le centre du modèle. La variance V mesure la dispersion au carré et l'écart type $\sigma = \sqrt{V}$ mesure une dispersion dans la même unité que la variable.

Pour un échantillon indépendant de taille n , la moyenne M_n vérifie

$$\mathbb{E}(M_n) = \mu, \quad V(M_n) = \frac{V}{n}, \quad \sigma(M_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

À retenir

L'écart type est l'unité naturelle pour mesurer un écart autour de la moyenne. Dans une moyenne d'échantillon, la variance est divisée par n et l'écart type par $\sqrt{n}$, pas par n .

2 1. Mesurer un écart et une dispersion

2.1 L'écart autour de l'espérance

Pour une variable aléatoire X , l'écart $X - \mu$ compare une réalisation à l'espérance $\mu = \mathbb{E}(X)$. Comme cet écart peut être positif ou négatif, on utilise sa valeur absolue $|X - \mu|$.

Pour un nombre $\delta > 0$, l'événement

$$|X - \mu| \geq \delta$$

signifie que la valeur observée est à une distance au moins δ de l'espérance. Son contraire est $|X - \mu| < \delta$, c'est-à-dire $\mu - \delta < X < \mu + \delta$.

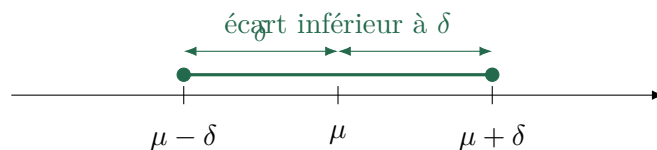


FIGURE 1 – Être dans la zone centrale signifie $|X - \mu| < \delta$.

2.2 Une borne universelle

L'inégalité de Bienaymé–Tchebychev affirme que, pour toute variable aléatoire X d'espérance μ , de variance V , et tout $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}.$$

Elle donne une majoration valable même lorsque la loi exacte de X est inconnue. Si $V/\delta^2 > 1$, la borne est simplement trop grande pour être informative : toute probabilité est déjà inférieure ou égale à 1.

Exemple entièrement détaillé

Une variable X vérifie $\mathbb{E}(X) = 10$ et $V(X) = 4$. On cherche une majoration de la probabilité que X s'éloigne d'au moins 3 de son espérance.

1. On identifie $\mu = 10$, $V = 4$ et $\delta = 3$.
2. On applique l'inégalité :

$$\mathbb{P}(|X - 10| \geq 3) \leq \frac{4}{3^2} = \frac{4}{9}.$$

3. On peut aussi formuler le complément :

$$\mathbb{P}(|X - 10| < 3) \geq 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

La première phrase est une borne de risque ; la seconde donne une garantie probabiliste minimale pour être dans l'intervalle $]7, 13[$.

3 2. Concentration d'une moyenne

3.1 L'inégalité de concentration

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes de même loi, d'espérance μ et de variance V , et

$$M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}.$$

Comme $V(M_n) = V/n$, l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev appliquée à M_n donne, pour tout $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}.$$

La borne est divisée par n : plus l'échantillon est grand, plus le risque majoré diminue.

3.2 Déterminer une taille d'échantillon

Si l'on veut garantir par cette inégalité un risque au plus $\alpha > 0$, il suffit d'imposer

$$\frac{V}{n\delta^2} \leq \alpha.$$

Comme tous les nombres sont positifs :

$$n \geq \frac{V}{\alpha\delta^2}.$$

La taille n étant entière, on choisit le plus petit entier supérieur ou égal au quotient.

Exemple entièrement détaillé

Une variable de Bernoulli a $p = 0,6$. On considère la moyenne M_n de n essais indépendants. On veut

$$\mathbb{P}(|M_n - 0,6| \geq 0,05) \leq 0,05.$$

1. La variance d'une Bernoulli vaut

$$V = p(1 - p) = 0,6 \times 0,4 = 0,24.$$

2. On impose la borne de concentration :

$$\frac{0,24}{n(0,05)^2} \leq 0,05.$$

3. Comme $(0,05)^2 = 0,0025$, cela devient

$$\frac{0,24}{0,0025n} \leq 0,05 \iff \frac{96}{n} \leq 0,05.$$

4. On obtient

$$n \geq \frac{96}{0,05} = 1920.$$

La taille suffisante fournie par cette méthode est $\boxed{n = 1920}$. Elle peut être prudente : l'inégalité est universelle et pas toujours optimale.

4 3. Loi des grands nombres et simulation

4.1 Énoncé et sens

Pour tout $\delta > 0$,

$$\mathbb{P}(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \longrightarrow +\infty.$$

On en déduit la **loi des grands nombres** :

$$\boxed{\mathbb{P}(|M_n - \mu| < \delta) \longrightarrow 1.}$$

La moyenne d'un grand échantillon se rapproche donc de l'espérance avec une probabilité de plus en plus grande.

Cette phrase ne dit pas que chaque moyenne finie est exactement égale à μ , ni qu'aucune réalisation ne pourra s'en écarter. Elle décrit l'évolution d'une probabilité quand la taille de l'échantillon augmente.

4.2 Observer sans confondre observer et prouver

Une simulation peut produire plusieurs moyennes M_n , puis calculer la proportion de celles qui vérifient $|M_n - \mu| < \delta$. Cette proportion devrait se rapprocher de la probabilité du modèle lorsque le nombre de simulations augmente. Elle illustre la loi des grands nombres, mais l'inégalité fournit la justification mathématique demandée au programme.

```
from random import random

def moyenne_bernoulli(n, p):
    total = 0
    for i in range(n):
        if random() < p:
            total = total + 1
    return total / n
```

À retenir

La concentration porte sur la moyenne M_n , pas sur une observation isolée. Pour une précision δ et un risque α , la méthode de Tchebychev fournit la condition $n \geq V/(\alpha\delta^2)$. C'est une taille suffisante, pas forcément la plus petite taille réelle.

5 4. Exercices gradués

Les corrections détaillées sont dans le fascicule séparé.

Exercice 1 – Application directe

Compétence : appliquer Bienaymé–Tchebychev. Une variable X a pour espérance 10 et variance 4. Majorer $\mathbb{P}(|X - 10| \geq 5)$, puis en déduire une minoration de $\mathbb{P}(|X - 10| < 5)$.

Indice.

Remplace μ , V et δ dans la formule, puis utilise l'événement contraire.

Exercice 2 – Moyenne de Bernoulli

Compétence : utiliser la concentration d'une fréquence. On répète $n = 400$ fois une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,2$. Pour la fréquence M_n des succès, majorer $\mathbb{P}(|M_n - 0,2| \geq 0,1)$.

Indice.

La variance d'une Bernoulli vaut $0,2 \times 0,8$, puis la borne est $V/(n\delta^2)$.

Exercice 3 – Taille d'échantillon

Compétence : isoler n et arrondir au supérieur. Une variable a une variance $V = 9$. Déterminer une taille suffisante pour que la probabilité $\mathbb{P}(|M_n - \mu| \geq 0,5)$ soit au plus 0,1.

Indice.

Résous $9/(n \times 0,5^2) \leq 0,1$, puis choisis un entier.

Exercice 4 – Interprétation

Compétence : distinguer probabilité et certitude. Expliquer la différence entre les deux phrases :

a) « La probabilité que M_n soit à moins de 0,02 de μ est au moins 0,95. »

b) « M_n est à moins de 0,02 de μ . »

Indice.

La première parle du modèle et d'un risque ; la seconde affirme ce qui arrive pour une réalisation donnée.

Exercice 5 – Écart en unités d'écart type

Compétence : choisir δ . Montrer, avec Bienaymé–Tchebychev, que $\mathbb{P}(|X - \mu| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{4}$, lorsque $\sigma > 0$. Donner aussi la probabilité minimale d'être à moins de 2σ de μ .

Indice.

Utilise $V = \sigma^2$ et $\delta = 2\sigma$, puis simplifie.

Exercice 6 – Simulation

Compétence : lire et interpréter un algorithme. On simule $N = 1000$ moyennes de taille $n = 100$ pour une Bernoulli de paramètre $p = 0,5$. Que peut-on comparer à la borne $V/(n\delta^2)$? Pourquoi les résultats ne sont-ils pas identiques ?

Indice.

La simulation donne une fréquence observée d'un événement, tandis que la borne donne une majoration théorique.

Exercice 7 – Problème de synthèse

Compétence : modéliser et dimensionner un sondage. Dans une population, la proportion réelle d'une caractéristique est $p = 0,35$. On modélise un sondage aléatoire par M_n , moyenne de variables de Bernoulli indépendantes.

- a) Déterminer une taille suffisante pour que $\mathbb{P}(|M_n - 0,35| \geq 0,03) \leq 0,05$.
- b) Interpréter l'intervalle de précision obtenu.

Indice.

Utilise $V = 0,35 \times 0,65$, puis la formule de taille.

6 Bilan et rappel différé

6.1 Erreurs fréquentes

- Utiliser σ à la place de V dans la formule de Tchebychev.
- Diviser l'écart type de la moyenne par n au lieu de $\sqrt{n}$.
- Oublier que δ doit être strictement positif.
- Affirmer une certitude à partir d'une probabilité élevée.
- Présenter $V/(n\delta^2)$ comme la probabilité exacte.
- Arrondir une taille d'échantillon vers le bas.

6.2 Auto-évaluation

- ☐ Je sais traduire $|X - \mu| \geq \delta$.
- ☐ Je sais appliquer la formule V/δ^2 .
- ☐ Je sais obtenir $V/(n\delta^2)$ pour une moyenne.
- ☐ Je sais calculer une taille suffisante et arrondir au supérieur.
- ☐ Je sais expliquer le sens, et la limite, de la loi des grands nombres.

6.3 Rappel différé

R1. Si $V = 2$ et $\delta = 1$, quelle borne donne Bienaymé–Tchebychev ?

R2. Quelle est la variance de la moyenne de n observations indépendantes de variance V ?

R3. Pour une précision fixée, que devient la borne lorsque n double ?

R4. Reformuler la loi des grands nombres en utilisant $\mathbb{P}(|M_n - \mu| < \delta)$.

En cas de blocage. Écrire d'abord μ , V , δ , n et α sur une ligne. Ensuite seulement remplacer dans la formule ; la plupart des erreurs viennent d'une confusion entre ces cinq rôles.