

Fiche d'histoire mathématique

Quand les moyennes se rapprochent

De la loi des grands nombres aux bornes de probabilité

Idée directrice. La concentration quantifie une intuition : une moyenne d'un grand nombre d'observations indépendantes fluctue souvent moins qu'une observation isolée. Elle ne promet pas que l'écart est impossible ; elle donne une borne sur la probabilité qu'il dépasse une précision choisie.

Table des matières

1	Bernoulli et la loi des grands nombres	1
2	Bienaymé et Tchebychev : une borne universelle	1
3	Du résultat théorique au sondage	1
4	Concentration moderne	2
5	À retenir	2
6	Pour aller plus loin	2

1 Bernoulli et la loi des grands nombres

Dans les jeux de hasard, une fréquence observée semble se rapprocher de la probabilité lorsque le nombre d'essais augmente. Jacob Bernoulli formalise cette intuition dans *Ars conjectandi*, publié en 1713 : les répétitions permettent d'apprendre une probabilité avec une précision de plus en plus grande, sous des hypothèses adaptées.

Cette loi ne dit pas que la fréquence devient exactement égale à la probabilité à un rang déterminé. Elle affirme qu'un écart fixé devient de moins en moins probable lorsque la taille de l'échantillon augmente.

2 Bienaymé et Tchebychev : une borne universelle

Au XIX^e siècle, Irénée-Jules Bienaymé puis Pafnouti Tchebychev établissent une inégalité qui ne suppose pas de connaître toute la loi. Pour une variable d'espérance μ , de variance V et pour $\delta > 0$, elle donne

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}.$$

Pour une moyenne de n variables indépendantes de même variance V , la variance devient V/n , donc

$$\mathbb{P}(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}.$$

Le facteur n au dénominateur traduit la stabilisation progressive.

3 Du résultat théorique au sondage

Les bornes de concentration répondent à une question de dimensionnement : combien d'observations faut-il recueillir pour que la probabilité d'une erreur supérieure à δ soit au plus α ? Il suffit d'imposer

$$n \geq \frac{V}{\alpha \delta^2}$$

et d'arrondir au nombre entier supérieur.

Cette forme de raisonnement s'est développée avec les statistiques, les sondages et l'assurance. Elle permet de garantir une précision minimale même lorsqu'un modèle probabiliste complet serait trop compliqué.

4 Concentration moderne

Au XX^e siècle, Markov, Kolmogorov, Hoeffding et d'autres mathématiciens établissent des bornes plus fines sous des hypothèses différentes. Les mêmes idées interviennent dans l'analyse des algorithmes, le machine learning et les simulations numériques.

Une fréquence simulée et une borne théorique ne jouent pas le même rôle. La simulation montre ce qui s'est produit dans un nombre fini de tirages ; la borne garantit que certains écarts ne peuvent être trop fréquents, dans le modèle choisi.

Repère	Apport
1713	Bernoulli formalise la loi des grands nombres.
1853	Bienaymé obtient une première forme de la borne de variance.
1867	Tchebychev la généralise et la popularise.
XX ^e siècle à aujourd'hui	Bornes fines, sondages, simulations et apprentissage statistique.

5 À retenir

La concentration ne transforme pas une probabilité élevée en certitude. Elle relie quatre éléments : variance, taille d'échantillon, précision demandée et probabilité d'erreur tolérée. Doubler n réduit la borne de Tchebychev de moitié, mais ne divise pas directement l'écart type par deux.

6 Pour aller plus loin

- MacTutor, notice sur Jacob Bernoulli et la loi des grands nombres : Jacob Bernoulli.
- Pour l'histoire de Tchebychev et des inégalités, consulter l'Encyclopaedia of Mathematics : Chebyshev inequality.
- Pour le lien entre moyenne et variance, consulter la fiche d'histoire des sommes de variables aléatoires.