

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Corrections expliquées

Vocabulaire ensembliste et logique

À consulter après une première recherche personnelle

Utilisation. Cherche d’abord dans le fascicule du cours. Lis son indice si tu es bloquée, puis compare les objets, les mots logiques et les justifications. Les exercices sont des créations pédagogiques et non des sujets officiels.

Rappel central. Un symbole doit être lu avec son type d’objet : $\in$ compare un élément et un ensemble, tandis que $\subseteq$ compare deux ensembles. Une implication ne se retourne pas sans preuve.

Table des matières

1	Diagnostic : réponses et rappels ciblés	3
2	Corrections des exercices 1 à 5	4
3	Corrections des exercices 6 à 10	5
4	Rappel différé : corrections	7

1 Diagnostic : réponses et rappels ciblés

Correction D1

$2 \in E$ est vraie car 2 figure dans la liste. $3 \in E$ est fausse car 3 n'y figure pas.

Correction D2

$A = \{1, 2\}$ contient seulement des éléments de $E = \{1, 2, 4\}$. Donc

$$\boxed{A \subseteq E}.$$

Correction D3

$$x \in [1, 4[\iff \boxed{1 \leq x < 4}.$$

Le 1 est inclus et le 4 est exclu.

Correction D4

Les éléments communs sont ceux qui apparaissent dans les deux listes :

$$\boxed{A \cap B = \{3\}}, \quad \boxed{A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}}.$$

Correction D5

La négation de $x \geq 2$ est

$$\boxed{x < 2}.$$

La frontière 2 est comprise dans la première proposition, mais pas dans sa négation.

Correction D6

Si $n = 4k$, alors $n = 2(2k)$, donc n est pair. L'implication est vraie. Sa réciproque « si n est pair, alors n est divisible par 4 » est fausse : $n = 2$ est pair mais n'est pas divisible par 4.

Point de méthode

Une inclusion se vérifie élément par élément. Une implication se réfute par un contre-exemple où l'hypothèse est vraie et la conclusion fausse.

2 Corrections des exercices 1 à 5

Correction 1

$2 \in E$ est vraie, $4 \in E$ est fausse,

$A \subseteq E$ est vraie.

La phrase $2 \subseteq E$ est mal formée dans ce contexte : 2 est un élément, pas un ensemble à comparer par inclusion. Si l'on force une réponse vrai/faux, elle est fausse comme affirmation d'inclusion.

Correction 2

Les éléments communs à A et B sont 2 et 4 :

$$A \cap B = \{2, 4\}.$$

En réunissant les éléments sans répétition :

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Dans E , les éléments qui ne sont pas dans B sont 1 et 5 :

$$\overline{B} = E \setminus B = \{1, 5\}.$$

Correction 3

$$I =] - 2, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 3\}.$$

Son complémentaire dans $\mathbb{R}$ contient les réels qui ne vérifient pas cette double inégalité :

$$\mathbb{R} \setminus I =] - \infty, -2] \cup]3, +\infty[.$$

Le -2 appartient au complémentaire car il n'appartient pas à I , tandis que 3 n'y appartient pas.

Correction 4

Le premier élément de chaque couple vient de A :

$$A \times B = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b)\}.$$

En inversant les rôles :

$$B \times A = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1)\}.$$

Chaque produit contient $2 \times 2 = 4$ couples. Les couples des deux produits ne sont pas les mêmes objets, car leur ordre n'est pas le même.

Correction 5

a) L'intervalle $[1, 4]$ contient ses deux bornes. Sa négation est

$$x < 1 \text{ ou } x > 4.$$

b) La négation de « $x > 0$ et $y \leq 2$ » est

$$x \leq 0 \text{ ou } y > 2.$$

c) La négation de « pour tout entier n , $n^2 \geq 0$ » est

$$\text{il existe un entier } n \text{ tel que } n^2 < 0.$$

Cette dernière proposition est fausse dans les entiers, mais elle est bien la négation logique de la phrase proposée.

3 Corrections des exercices 6 à 10

Correction 6

a) Si n est multiple de 6, il existe un entier k tel que $n = 6k$. Alors

$$n = 6k = 3(2k),$$

donc n est multiple de 3. **b)** La réciproque est : « si n est multiple de 3, alors n est multiple de 6 ». Elle est fausse avec $n = 3$, qui est multiple de 3 mais pas de 6. **c)** La contraposée est : « si n n'est pas multiple de 3, alors n n'est pas multiple de 6 ». Elle est vraie et équivalente à l'implication initiale.

Correction 7

Si P est vraie, $x = 2$, alors $x^2 = 4$, donc Q est vraie. Ainsi P est une condition suffisante de Q , et Q est une condition nécessaire de P . En revanche, Q n'est pas une condition suffisante de P , car $x = -2$ vérifie $x^2 = 4$ mais pas $x = 2$. La bonne équivalence serait $x^2 = 4 \iff x = 2$ ou $x = -2$.

Correction 8

Tout entier n est soit pair, soit impair :

- si $n = 2k$, alors $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ est pair ;
- si $n = 2k + 1$, alors

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

est impair.

Les deux cas sont exclusifs et couvrent tous les entiers. Le carré est donc pair lorsque l'entier est pair et impair lorsque l'entier est impair.

Correction 9

Posons $P(n)$: « $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$ ».

Initialisation. Pour $n = 1$,

$$1 = 1^2.$$

La propriété est vraie au premier rang.

Hérédité. Supposons, pour un entier $k \geq 1$, que

$$1 + 3 + \dots + (2k - 1) = k^2.$$

Alors

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) &= k^2 + (2k + 1) \\ &= (k + 1)^2. \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $k + 1$.

Conclusion. Par récurrence, l'égalité est vraie pour tout $n \geq 1$.

Correction 10

a) L'implication est fausse, car $x = -3$ vérifie $x^2 = 9$, mais $x \neq 3$.

b) La phrase est universelle et contient une implication. Sa négation est :

il existe un réel x tel que $x^2 = 9$ et $x \neq 3$.

Le contre-exemple $x = -3$ réalise précisément cette négation.

c) Une implication vraie est

$$\boxed{\text{si } x^2 = 9, \text{ alors } x = 3 \text{ ou } x = -3}.$$

On peut aussi écrire $x^2 = 9 \implies |x| = 3$.

Point de méthode

Dans une correction logique, nommer la méthode : liste, contre-exemple, complémentaire, contraposée, disjonction des cas ou récurrence. Le lecteur doit voir pourquoi la phrase obtenue répond exactement à la question.

4 Rappel différé : corrections

Correction R1

$x \in A$ signifie que x est un élément de A . La phrase $A \subseteq E$ signifie que chaque élément de A est aussi un élément de E . Le premier symbole compare un élément et un ensemble ; le second compare deux ensembles.

Correction R2

La phrase « $x \leq 3$ et $x > -1$ » a pour négation

$$\boxed{x > 3 \text{ ou } x \leq -1}.$$

On applique la règle : la négation de « et » devient « ou », et chaque inégalité est niée.

Correction R3

$x = -2$ est un contre-exemple : $(-2)^2 = 4$, mais $-2 \neq 2$.

Correction R4

Il faut vérifier l'**initialisation**, puis démontrer l'**hérédité** avant d'écrire la conclusion par récurrence.