

Baccalauréat général – spécialité mathématiques

Vocabulaire ensembliste et logique

Lire précisément les objets et les phrases mathématiques

Ensembles, propositions et méthodes de raisonnement

Objectifs

- Utiliser correctement appartenance, inclusion, réunion, intersection, complémentaire et intervalles.
- Décrire des couples, des triplets, des produits cartésiens et des fonctions.
- Traduire une phrase en proposition, la nier et utiliser « et », « ou » et les quantificateurs.
- Distinguer implication, réciproque, contraposée, équivalence, condition nécessaire et condition suffisante.

Cadre du cours. On vise la session 2027 du baccalauréat général, spécialité mathématiques. Le programme de référence est celui du Bulletin officiel spécial n° 8 du 25 juillet 2019. Ce vocabulaire est transversal : il doit être utilisé dans les autres chapitres, pas mémorisé comme une liste isolée. Les exercices sont créés pour ce cours et ne sont pas des sujets officiels.

Organisation conseillée. Prévoir cinq séances de 35 à 45 minutes :

1. diagnostic, ensembles et intervalles ;
2. n-uplets, produits cartésiens et fonctions ;
3. propositions, connecteurs et négations ;
4. implications et stratégies de preuve ;
5. récurrence, exercices de synthèse et rappel différé.

Table des matières

1	Avant de commencer : diagnostic et rappels	3
2	1. Ensembles, opérations et intervalles	4
3	2. Couples, produits cartésiens et fonctions	6
4	3. Propositions, connecteurs et négations	7
5	4. Implication, équivalence et conditions	8
6	5. Démonstration par récurrence	9
7	6. Exercices gradués	10
8	Bilan et rappel différé	12

1 Avant de commencer : diagnostic et rappels

Durée : 12 minutes, sans calculatrice. Le but est de repérer les symboles qui demandent un rappel.

D1. Pour $E = \{1, 2, 4\}$, dire si $2 \in E$ et si $3 \in E$.

D2. Dire si $\{1, 2\} \subseteq E$.

D3. Traduire $x \in [1, 4[$ en inégalités.

D4. Avec $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{3, 4\}$, déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.

D5. Nier la phrase « $x \geq 2$ ».

D6. La proposition « si un entier est divisible par 4, alors il est pair » est-elle vraie ? Sa réciproque est-elle vraie ?

1.1 Rappels ciblés

Les accolades décrivent un ensemble, et $\in$ se lit « appartient à ». Le symbole $\subseteq$ compare deux ensembles : $A \subseteq B$ signifie que tout élément de A appartient à B . On ne compare pas un élément et un ensemble avec le même symbole.

Une proposition est une phrase qui peut être vraie ou fausse. Une implication « si P , alors Q » ne dit pas que P est réalisée ; elle dit que toute réalisation de P entraîne Q .

À retenir

Lire les symboles en mots avant de calculer : $\in$ compare un élément à un ensemble, $\subseteq$ compare deux ensembles, et $\cap$ ou $\cup$ produisent de nouveaux ensembles. Pour une phrase logique, identifier l'hypothèse, la conclusion et la négation demandée.

2 1. Ensembles, opérations et intervalles

2.1 Éléments et sous-ensembles

Un ensemble est une collection d'objets. On écrit $E = \{1, 2, 4\}$. L'ordre d'écriture n'a pas d'importance et un élément n'est pas répété :

$$\{1, 2, 4\} = \{4, 2, 1\}, \quad \{1, 1, 2\} = \{1, 2\}.$$

L'ensemble vide est noté $\emptyset$. Une partie A de E est un sous-ensemble, noté $A \subseteq E$, si chaque élément de A est dans E .

2.2 Réunion, intersection et complémentaire

Pour A et B :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Le « ou » inclusif autorise un élément appartenant aux deux ensembles. Si $A \subseteq E$, le complémentaire de A dans E est

$$\overline{A} = E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

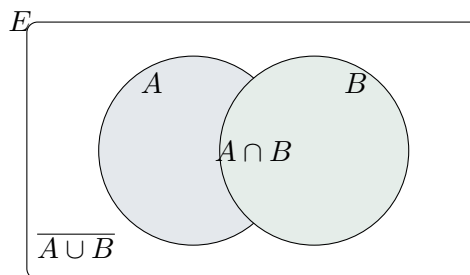


FIGURE 1 – Dans l'univers E , l'intersection est la zone commune ; le complémentaire est à l'extérieur de l'ensemble considéré.

Exemple entièrement détaillé

Prenons

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{3, 4, 5\}.$$

1. Les éléments communs sont 3 et 4, donc

$$A \cap B = \{3, 4\}.$$

2. En rassemblant sans répétition, on obtient

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

3. Les éléments de E absents de A sont 5 et 6, donc

$$\overline{A} = E \setminus A = \{5, 6\}.$$

La phrase « $5 \in \overline{A}$ » est vraie, alors que « $2 \in \overline{A}$ » est fausse.

2.3 Ensembles de nombres et intervalles

Les notations usuelles sont

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{D} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R},$$

où $\mathbb{D}$ désigne les nombres décimaux et $\mathbb{Q}$ les nombres rationnels. Les crochets indiquent si une borne est incluse :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Un crochet tourné vers l'extérieur signifie que la borne n'est pas incluse : $[a, b[$ signifie $a \leq x < b$. On peut écrire une réunion d'intervalles pour décrire plusieurs zones.

3 2. Couples, produits cartésiens et fonctions

3.1 N-uplets et produit cartésien

Un couple (x, y) est ordonné : en général $(x, y) \neq (y, x)$. Le produit cartésien $A \times B$ est l'ensemble des couples dont le premier élément vient de A et le second de B :

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ et } y \in B\}.$$

Un triplet (x, y, z) , puis un n -uplet, ordonne de la même manière plusieurs composantes.

Exemple entièrement détaillé

Si $A = \{1, 2\}$ et $B = \{a, b, c\}$, alors

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}.$$

Il y a $2 \times 3 = 6$ couples. En revanche, $B \times A$ contient des couples comme $(a, 1)$, qui ne sont pas les mêmes objets.

3.2 Fonction, image et antécédent

Une fonction f de A vers B associe à chaque élément x de A une unique image $f(x)$ dans B . L'ensemble A est le domaine de départ et B l'ensemble d'arrivée.

On peut lire une fonction comme un ensemble de couples

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq A \times B.$$

Un élément de B peut ne posséder aucun antécédent, ou plusieurs. La fonction est **injective** si deux antécédents différents n'ont jamais la même image, et **surjective** si tout élément de B a au moins un antécédent. Elle est **bijjective** si elle est à la fois injective et surjective : chaque élément de B a alors exactement un antécédent.

3.3 Composition

Si $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$, on peut composer :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

On applique f en premier, puis g . L'ordre est important.

4 3. Propositions, connecteurs et négations

4.1 Proposition et variables

Une proposition est une phrase à laquelle on peut attribuer vrai ou faux. Par exemple, P : « 7 est premier » est vraie. Une phrase comme « $x > 2$ » dépend de la valeur de x ; elle devient une proposition lorsqu'on précise x , ou lorsqu'on la quantifie.

Les connecteurs se lisent :

- P **et** Q : les deux propositions sont vraies ;
- P **ou** Q : au moins l'une des deux est vraie ;
- **non** P , noté parfois $\neg P$: P est fausse.

P	Q	P et Q	P ou Q
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

4.2 Nier correctement

Nier une proposition signifie construire une proposition vraie exactement lorsque la première est fausse :

$$\begin{aligned}\text{non}(P \text{ et } Q) &= \text{non } P \text{ ou non } Q, \\ \text{non}(P \text{ ou } Q) &= \text{non } P \text{ et non } Q.\end{aligned}$$

Pour les inégalités :

$$\text{non}(x \geq 2) \iff x < 2, \quad \text{non}(x > 2) \iff x \leq 2.$$

Les bornes changent donc de stricteté.

4.3 Quantificateurs

« Pour tout réel x , $P(x)$ » se note $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$. « Il existe un réel x tel que $P(x)$ » se note $\exists x \in \mathbb{R}, P(x)$. Les symboles sont utiles, mais le programme demande surtout de savoir lire et écrire ces phrases en français.

La négation inverse le quantificateur :

$$\begin{aligned}\text{non}(\forall x, P(x)) &\iff \exists x, \text{non } P(x), \\ \text{non}(\exists x, P(x)) &\iff \forall x, \text{non } P(x).\end{aligned}$$

Pour réfuter « pour tout », un seul contre-exemple suffit. Pour prouver « pour tout », il faut un raisonnement qui couvre tous les cas.

5 4. Implication, équivalence et conditions

5.1 Implication et réciproque

L'implication $P \implies Q$ signifie : si P est vraie, alors Q est vraie. Pour montrer qu'une implication est fausse, il suffit de trouver un exemple où P est vraie et Q fausse.

La **réciproque** est $Q \implies P$. Elle n'est pas automatiquement vraie. La **contraposée** est non $Q \implies$ non P , et elle est toujours équivalente à l'implication initiale.

Exemple entièrement détaillé

Soit n un entier.

Implication. Si n est divisible par 4, alors n est pair. En effet, $n = 4k = 2(2k)$ pour un entier k , donc n est divisible par 2.

Réciproque. « Si n est pair, alors n est divisible par 4 » est fausse : $n = 2$ est pair mais n'est pas divisible par 4.

Contraposée. La contraposée est « si n n'est pas pair, alors n n'est pas divisible par 4 ». Elle est vraie et équivalente à l'implication initiale.

5.2 Nécessaire, suffisant et équivalence

Dans $P \implies Q$:

- P est une condition **suffisante** de Q ;
- Q est une condition **nécessaire** de P .

Une équivalence $P \iff Q$ signifie les deux implications $P \implies Q$ et $Q \implies P$. Pour la démontrer, on peut faire deux sens séparés ou transformer une égalité par une suite d'équivalences justifiées.

5.3 Raisonnements usuels

- **Disjonction des cas** : séparer des cas qui couvrent toutes les possibilités, puis conclure dans chaque cas.
- **Contraposée** : remplacer $P \implies Q$ par sa contraposée lorsque la négation est plus facile.
- **Absurde** : supposer la conclusion fausse et obtenir une contradiction avec les hypothèses.
- **Contre-exemple** : une proposition universelle fausse est réfutée par un seul exemple.

6 5. Démonstration par récurrence

6.1 L'idée

Pour montrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on procède en deux étapes :

1. **Initialisation** : vérifier $P(n_0)$.
2. **Hérédité** : montrer que, pour un entier $k \geq n_0$, si $P(k)$ est vraie alors $P(k+1)$ est vraie.

On conclut que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. L'hypothèse $P(k)$ sert uniquement à démontrer l'étape suivante : elle n'est pas une égalité à résoudre.

Exemple entièrement détaillé

Montrons, pour tout $n \geq 1$, que

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On appelle $P(n)$ cette égalité.

Initialisation. Pour $n = 1$,

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1.$$

La propriété $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $P(k)$ vraie pour un entier $k \geq 1$:

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= (k+1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

C'est exactement la formule au rang $k+1$. La propriété est héréditaire.

Conclusion. La formule est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

À retenir

Une implication ne permet pas d'inverser automatiquement la conclusion. Pour une preuve par récurrence, écrire les trois mots **initialisation**, **hérédité**, **conclusion**, et remplacer chaque étape par un calcul justifié.

7 6. Exercices gradués

Les corrections détaillées sont dans le fascicule séparé.

Exercice 1 – Appartenance et inclusion

Compétence : distinguer $\in$ et $\subseteq$. Pour $E = \{0, 1, 2, 3\}$ et $A = \{0, 2\}$, dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses :

$$2 \in E, \quad 4 \in E, \quad A \subseteq E, \quad 2 \subseteq E.$$

Indice.

Le symbole $\in$ attend un élément à gauche ; le symbole $\subseteq$ attend un ensemble à gauche.

Exercice 2 – Opérations sur les ensembles

Compétence : calculer réunion, intersection et complémentaire. Dans $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 4\}$ et $B = \{2, 3, 4\}$, calculer $A \cap B$, $A \cup B$ et $\overline{B}$.

Indice.

Liste séparément les éléments communs, puis tous les éléments sans répétition, enfin ceux de E qui ne sont pas dans B .

Exercice 3 – Intervalles

Compétence : traduire une notation. Écrire sous forme d'inégalités puis représenter sur une droite graduée l'ensemble $I =]-2, 3]$. Décrire aussi son complémentaire dans $\mathbb{R}$.

Indice.

La borne -2 est exclue et 3 est incluse. Le complémentaire contient les valeurs à gauche de -2 et strictement après 3 .

Exercice 4 – Produit cartésien

Compétence : énumérer des couples ordonnés. Pour $A = \{0, 1\}$ et $B = \{a, b\}$, écrire $A \times B$ et $B \times A$. Combien d'éléments chaque produit contient-il ?

Indice.

Le premier élément vient du premier ensemble, le second du deuxième.

Exercice 5 – Négation

Compétence : nier une proposition composée. Nier chacune des phrases :

- a) $x \in [1, 4]$;
- b) $x > 0$ et $y \leq 2$;
- c) Pour tout entier n , $n^2 \geq 0$.

Indice.

Remplace « et » par « ou » dans la négation de la phrase b), et « pour tout » par « il existe » dans la phrase c).

Exercice 6 – Implication et contraposée

Compétence : reconnaître une implication fautive et sa contraposée. On considère : « Si un entier n est multiple de 6, alors il est multiple de 3. »

- a) Justifier l'implication.
- b) Écrire sa réciproque et donner un contre-exemple si elle est fausse.
- c) Écrire sa contraposée.

Indice.

Écris un multiple de 6 sous la forme $6k$. Pour la réciproque, cherche un multiple de 3 qui n'est pas multiple de 6.

Exercice 7 – Conditions

Compétence : distinguer nécessaire et suffisante. Pour un réel x , on pose $P : « x = 2 »$ et $Q : « x^2 = 4 »$. Dire si P est suffisante de Q , si Q est nécessaire de P , et si Q est suffisante de P .

Indice.

Teste aussi $x = -2$ pour savoir si $x^2 = 4$ impose $x = 2$.

Exercice 8 – Disjonction des cas

Compétence : raisonner sur la parité. Montrer que le carré d'un entier est pair ou impair, et que les deux cas correspondent respectivement à un carré pair ou impair.

Indice.

Un entier est soit de la forme $2k$, soit de la forme $2k + 1$. Étudie les deux carrés.

Exercice 9 – Récurrence

Compétence : rédiger une preuve par récurrence. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Indice.

Initialise à $n = 1$, puis ajoute le terme suivant $2(k + 1) - 1 = 2k + 1$ à l'hypothèse de rang k .

Exercice 10 – Synthèse logique

Compétence : choisir une méthode et rédiger. On affirme : « Pour tout réel x , si $x^2 = 9$, alors $x = 3$. »

- a) Cette implication est-elle vraie ? Justifier.
- b) Écrire sa négation.
- c) Proposer une implication vraie utilisant $x^2 = 9$.

Indice.

Cherche les deux solutions de $x^2 = 9$. La négation d'une affirmation universelle est une existence.

8 Bilan et rappel différé

8.1 Erreurs fréquentes

- Écrire $2 \subseteq E$ au lieu de $2 \in E$.
- Confondre l'intersection (« et ») et la réunion (« ou »).
- Inclure une borne d'intervalle malgré un crochet ouvert.
- Inverser une implication sans vérifier sa réciproque.
- Prendre un exemple favorable comme preuve d'une affirmation universelle.
- Nier « et » en gardant « et », ou nier « pour tout » sans introduire un contre-exemple.
- Faire une récurrence sans initialisation ou sans utiliser explicitement l'hypothèse de rang k .

8.2 Auto-évaluation

- ☐ Je sais lire $\in$, $\subseteq$, $\cap$, $\cup$ et le complémentaire.
- ☐ Je sais traduire un intervalle et son complémentaire.
- ☐ Je sais décrire un produit cartésien et une fonction.
- ☐ Je sais nier une proposition avec « et », « ou » et « pour tout ».
- ☐ Je sais distinguer implication, réciproque et contraposée.
- ☐ Je sais rédiger une preuve par cas ou par récurrence.

8.3 Rappel différé

R1. Quelle différence entre $x \in A$ et $A \subseteq E$?

R2. Nier « $x \leq 3$ et $x > -1$ ».

R3. Donner un contre-exemple à l'implication « si $x^2 = 4$, alors $x = 2$ ».

R4. Quelles sont les deux étapes indispensables d'une récurrence avant la conclusion ?

En cas de blocage. Réécrire la phrase en français courant, entourer les mots « tout », « existe », « et », « ou », « si », « alors », puis traduire un seul symbole à la fois.