

Fiche d'histoire mathématique

Définir, relier, démontrer

De la logique d'Aristote aux fondements modernes

Idée directrice. Les ensembles donnent un langage pour parler d'objets, de regroupements et de fonctions. La logique permet de transformer des phrases en déductions contrôlables. Leur histoire montre que la précision des mots et des symboles est une condition de la preuve.

Table des matières

1	Aristote et la forme des raisonnements	1
2	De l'algèbre de la logique aux symboles	1
3	Cantor et les ensembles	1
4	Les paradoxes et l'axiomatisation	1
5	Récurrence et fondements	2
6	À retenir	2
7	Pour aller plus loin	2

1 Aristote et la forme des raisonnements

Vers 300 avant notre ère, Aristote organise une théorie des syllogismes. Il étudie des phrases comme « tous les êtres de la classe A ont la propriété P » et cherche quelles conclusions suivent nécessairement des hypothèses.

La logique ancienne n'utilise pas encore les symboles $\cap$, $\cup$ ou $\forall$, mais elle pose des questions toujours présentes dans le cours : qu'est-ce qui est supposé, qu'est-ce qui est conclu, et une réciproque est-elle valable ?

2 De l'algèbre de la logique aux symboles

Au XIX^e siècle, George Boole représente les propositions par des calculs algébriques. Une opération « et » et une opération « ou » peuvent être manipulées comme des règles, à condition de respecter leur sens logique.

Giuseppe Peano introduit ou stabilise plusieurs symboles de la logique et de la théorie des ensembles à la fin du XIX^e siècle. Les notations deviennent un outil de compression : un symbole bien choisi évite de répéter une phrase longue, mais oblige à connaître exactement sa définition.

3 Cantor et les ensembles

Georg Cantor développe la théorie des ensembles à partir de ses travaux sur les séries trigonométriques dans les années 1870. Il comprend qu'on peut comparer des ensembles infinis en mettant leurs éléments en correspondance, même si l'idée de « nombre d'éléments » devient alors plus subtile.

Les ensembles de nombres, les intervalles, les fonctions et les produits cartésiens fournissent un langage commun à l'analyse et à la géométrie. Une fonction peut être vue comme une règle qui associe à chaque élément d'un ensemble de départ un unique élément d'un ensemble d'arrivée.

4 Les paradoxes et l'axiomatisation

La théorie naïve selon laquelle toute propriété définit automatiquement un ensemble conduit à des contradictions. En 1901, Bertrand Russell formule le paradoxe de l'ensemble des ensembles qui ne s'appartiennent pas à eux-mêmes.

Cette crise ne détruit pas la théorie des ensembles ; elle pousse à préciser les règles autorisées. Zermelo propose en 1908 une axiomatisation, puis Fraenkel, von Neumann et d'autres la développent. Les mathématiques modernes acceptent que les axiomes délimitent ce que l'on peut construire et démontrer.

5 Récurrence et fondements

La démonstration par récurrence formalise une propriété des entiers à partir de deux étapes : une base et une transmission du rang k au rang $k + 1$. Les travaux de Peano sur les axiomes de l'arithmétique donnent un cadre explicite à ce principe.

Au XX^e siècle, Frege, Russell, Whitehead, Hilbert, Gödel et Turing étudient les liens entre langage, preuve et calcul. Les théorèmes d'incomplétude de Gödel et les résultats de Turing montrent que même un système formel très précis possède des limites : tout énoncé vrai n'est pas forcément prouvable dans un système donné, et tout problème n'a pas forcément un algorithme général de décision.

Repère	Apport
Antiquité grecque	Aristote organise les formes du raisonnement.
1847	Boole transforme une partie de la logique en calcul algébrique.
1870–1900	Cantor fonde la théorie moderne des ensembles ; Peano développe les notations.
1901–1908	Russell révèle un paradoxe ; Zermelo commence l'axiomatisation.
XX ^e siècle	Gödel et Turing étudient les limites de la preuve et du calcul.

6 À retenir

Les ensembles organisent les objets ; la logique organise les phrases ; une preuve organise les étapes qui relient hypothèses et conclusion. L'histoire explique pourquoi il faut distinguer appartenance et inclusion, implication et réciproque, exemple et démonstration.

7 Pour aller plus loin

- MacTutor, histoire de la théorie des ensembles : beginnings of set theory.
- MacTutor, histoire des symboles d'ensembles et de logique : set theory and logic symbols.
- MacTutor, notice sur Bertrand Russell et le paradoxe : Bertrand Russell.